［研究·设计］

DOI:10.3969/j. issn. 1005-2895. 2015. 06. 003

G^2 连续的截面数据重构

刘　栋，张　旭，金　龙，冯兴辉

（上海工程技术大学 机械工程学院，上海　201620）

摘　要：针对特征间 G^2 连续约束条件难于满足，导致截面重构质量不理想的问题，提出了一种有效的 G^2 连续截面数据重构方法。文章重点研究圆弧特征与自由特征间边界约束为 G^2 连续的截面数据重构。优先重构圆弧特征，然后基于边界 G^1 连续约束模型重构自由特征；插入最优节点，微调控制点满足严格 G^2 连续约束条件。实例表明该方法能够保证截面重构质量，缩短截面重构周期。从而解决包含圆弧与B样条曲线的截面特征重构问题。

关　键　词：逆向工程；截面数据重构；G^2 连续；特征；约束

中图分类号：TP391　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1005-2895(2015)06-0014-05

Reconstruction of G^2 Continuous Cross Sectional Data

LIU Dong, ZHANG Xu, JIN Long, FENG Xinghui

(School of Mechanical Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China)

Abstract: Due to G^2 continuity between the features difficult to meet in reverse engineering, resulting in sectional reconstruction poor accuracy, an effective method of adding G^2 continuity was proposed. This paper focuses on the sectional data reconstruction of arc features and free features in G^2 continuous. Priority to accurately reconstruct the arc, then based on G^1 continuous reconstruct free feature; insert the optimal node and slightly adjust control points to meet the G^2 continuous strictly. Examples show that this method can guarantee the quality section reconstruction, greatly shorten the period of reconstruction, so as to solve the problem of the reconstruction of the cross section of the circular arc and B spline curve.

Key words: reverse engineering; sectional curve reconstruction; G^2 continuous; feature; constraint

工业技术的快速发展，其对产品曲面及精度（比如A级曲面）要求越来越高。特征间边界相切连续（G^1 连续）已经不能满足产品需求，边界曲率连续（G^2 连续）成为工程中必不可少的要求。在基于特征的逆向工程技术中，二维截面数据的重构是曲面重构的基础，其重构的精确与否，质量好坏直接关系到三维重构模型能否最大程度复原初始设计意图[1]。因此，进一步研究 G^2 连续的截面数据重构是十分必要的[2]。

国内外学者对截面数据的重构方法进行了大量的研究。P. Benko 等[3-4]采用直线和圆弧特征重构截面曲线，并在特征间添加了简单约束关系。Ke Yinglin 和刘云峰等[5-6]综合考虑直线、圆弧和自由曲线以及 G^1 连续约束，整体优化重构截面曲线，可以获得较好的整体光顺性。虽然这些方法可以解决普通产品的逆向重构问题，但没有考虑特征间 G^2 连续约束的问题，美国 EDS 公司的 NX. Imageware 13.2 等软件虽然能保证特征间 G^2 连续约束问题，但需要人机交互调整参数来保证曲线的逼近精度。

针对上文所述不足，本文提出了一种基于边界 G^2 连续约束的截面重构方法，该方法能够在满足约束的同时，保证其重构精度。考虑到直线与自由特征间边界 G^2 连续，较圆弧与自由特征更为简单，本文重点研究圆弧特征和自由特征间 G^2 连续约束条件的截面数据重构。首先优先重构圆弧特征，然后基于边界 G^1 连

收稿日期：2015-04-07；**修回日期**：2015-05-30

基金项目：国家自然科学基金(51205246)

作者简介：刘栋(1989)，男，江苏徐州人，硕士研究生，主要研究方向为逆向工程、CAD。通信作者：张旭，E-mail：zxu1116@126.com

续约束模型重构自由特征；插入最优节点，微调控制点满足 G^2 连续约束条件。

1　特征及约束表达

考虑到自由特征两端边界约束情况相同，本文在分析中仅以其中一端为例。圆弧特征采用隐式方程进行表示[7]，自由特征采用 B 样条曲线进行表达。

1.1　圆弧特征

圆弧表达式为

$$f_c(x,y)=c_0(x^2+y^2)+c_1x+c_2y+c_3=0,\qquad(1)$$

式中：(x,y) 表示圆弧上数据点坐标；c_0,c_1,c_2,c_3 为圆弧规范化参数，且满足规范化约束条件 $c_1^2+c_2^2-4c_0c_3-1=0$。

1.2　自由特征

p 次 B 样条曲线定义为

$$C(u)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(u)P_i\quad u_p\leqslant u\leqslant u_{n+1},n\geqslant p-1。\qquad(2)$$

式中：P_i 表示 B 样条曲线的控制点 $P=\{P_0,\cdots,P_n\}$；

$N_{i,p}(u)$ 表示定义在节点矢量 $\boldsymbol{U}=\left\{\underbrace{0,\cdots,0}_{p+1},u_{p+1},\cdots,u_n,\underbrace{1,\cdots,1}_{p+1}\right\}$ 上的 p 次 B 样条基函数。

1.3　特征间边界 G^2 约束

根据圆弧性质可知，圆弧的曲率为

$$K_A=\frac{1}{R}=|2c_0|。\qquad(3)$$

根据 B 样条曲线定义可知，在端点处有

$$C^{(1)}(0)=\frac{p}{u_{p+1}}(P_1-P_0),\qquad(4)$$

$$C^{(2)}(0)=\frac{p-1}{u_{p+1}-u_2}\left[\frac{p}{u_{p+2}-u_2}(P_2-P_1)+\frac{p}{u_{p+1}-u_1}(P_1-P_0)\right]。\qquad(5)$$

根据曲线的曲率公式，B 样条端点处的曲率有

$$K_B=\frac{|C^{(1)}(0)\times C^{(2)}(0)|}{|C^{(1)}(0)|^3}=\frac{(p-1)u_{p+1}^2}{p(u_{p+1}-u_2)(u_{p+2}-u_2)}\cdot\frac{(P_1-P_0)\times(P_2-P_1)}{|(P_1-P_0)|^3}。\qquad(6)$$

设控制点 P_1 与 P_0 的代数距离为 a，控制点 P_2 到直线 P_0P_1 的投影距离为 h，则公式(6)可转化为

$$K_B=\frac{(p-1)u_{p+1}^2h}{p(u_{p+1}-u_2)(u_{p+2}-u_2)a^2}。\qquad(7)$$

根据曲率相等，有 $K_A=K_B$，即

$$h=\frac{2p|c_0|(u_{p+1}-u_2)(u_{p+2}-u_2)a^2}{(p-1)u_{p+1}^2}。\qquad(8)$$

因此，圆弧与 B 样条曲线 G^2 约束条件为

$$\begin{cases}\mathrm{d}(P_0-A)=0\\ \mathrm{d}(P_1-L)=0\\ \mathrm{d}(P_2-L_1)=0\end{cases}。\qquad(9)$$

式中：A—圆弧特征；

P_i—B 样条曲线的控制点 $P=\{P_0,\cdots,P_n\}$；

L—圆弧在 P_0 点处切线；

L_1—与直线 L 相距 h 的平行线。

则 $h=\dfrac{2p|c_0|(u_{p+1}-u_2)(u_{p+2}-u_2)|P_1-P_0|^2}{(p-1)u_{p+1}^2}$。

2　基于边界 G^1 约束重构

由于边界 G^2 连续为非线性关系，无法直接对截面数据进行重构，本文采用先基于边界 G^1 约束重构，再满足边界 G^2 约束的重构策略。在根据边界 G^1 连续约束的重构过程中，采用目前截面数据重构常用的分步拟合的思想[8-11]，优先重构自由度较少的圆弧，并保证其重构精度；再根据边界 G^1 连续约束条件重构自由度大的自由特征。

2.1　圆弧特征重构

给定 $k+1$ 个离散数据点 $R=\{R_0,\cdots,R_k\}$，则数据点 R_i 到圆弧的代数距离为 $d_i=c_0(x_i^2+y_i^2)+c_1x_i+c_2y_i+c_3$，对离散数据点使用最小二乘法拟合圆弧，建立如下数学模型：

$$\min f(x)=\sum_{i=0}^{k}d_i^2=\sum_{i=0}^{k}|c_0(x_i^2+y_i^2)+c_1x_i+c_2y_i+c_3|^2=\boldsymbol{XMX}^{\mathrm{T}};$$

$$约束条件\quad c_1^2+c_2^2-4c_0c_3-1=0。\qquad(10)$$

式中：d_i—各个数据点到直线的有向代数距离；

$\boldsymbol{X}$—圆弧的参数矩阵，$\boldsymbol{X}=[c_0,c_1,c_2,c_3]$；

$\boldsymbol{M}$—数据点构成的圆弧分离矩阵；

$$\boldsymbol{M}=\sum_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}(x_i^2+y_i^2)^2 & x_i(x_i^2+y_i^2) & y_i(x_i^2+y_i^2) & (x_i^2+y_i^2)\\ x_i(x_i^2+y_i^2) & x_i^2 & x_iy_i & x_i\\ y_i(x_i^2+y_i^2) & x_iy_i & y_i^2 & y_i\\ (x_i^2+y_i^2) & x_i & y_i & 1\end{bmatrix}。$$

2.2　基于 G^1 连续约束的自由特征重构

本文自由特征采用常用的 4 阶 3 次 B 样条曲线进行拟合。为保证严格的 G^1 连续，采用拉格朗日乘子法进行求解，既能保证 B 样条曲线边界 G^1 连续约束，同时又能保证整条样条曲线的逼近误差，为进一步满足

G^2连续约束奠定基础。建立如下数学模型:

$$\min f(\boldsymbol{P}) = \sum_{i=0}^{m}[Q_i - C(ub_i)]^2 = \sum_{i=0}^{m}\left[Q_i - \sum_{i=0}^{n}N_{i,3}(ub_i)P_i\right]^2 = (\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{NP});$$

$$\text{约束条件} \quad \begin{cases} \mathrm{d}(P_0 - A_0) = 0 \\ \mathrm{d}(P_1 - L) = 0 \end{cases}。 \tag{11}$$

式中:P_i—B 样条曲线的控制点 $P = \{P_0, \cdots, P_n\}$;

L—重构圆弧在 P_0点的切线;

Q_i—二维点列 $\boldsymbol{Q} = \{Q_0, \cdots, Q_m\}$;

A_0—数据点 Q_0在重构圆弧特征上的投影点。

上述数学模型中的约束为线性约束,涉及$(n+1)$个未知量(控制点 P_i)和 2 个约束条件,可采用拉格朗日乘子法求解。

3 基于边界 G^2连续重构

由于本文中自由特征采用 3 次 B 样条曲线表达,因此,圆弧与 B 样条连接处曲率相等公式(9)可化简为

$$h = \frac{3|c_0|u_5 a^2}{u_4}。 \tag{12}$$

式中:a—B 样条曲线控制点 P_1与 P_0的距离;

h—控制点 P_2到直线 P_0P_1的距离;

c_0—圆弧参数;

u_i—B 样条曲线的节点矢量 $\boldsymbol{U} = \left\{\underbrace{0,\cdots,0}_{4}, u_4, \cdots, u_n, \underbrace{1,\cdots,1}_{4}\right\}$。

由于基于 G^1连续约束条件重构的 B 样条曲线在其消去误差界 E 内控制点数目达到最少,直接添加边界曲率连续约束时,控制点数目往往无法满足 B 样条曲线的逼近误差,在分段点附近产生变形,如图 1 所示。

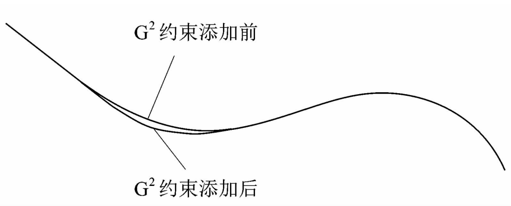

图 1 加入 G^2约束对曲线的影响

Figure 1 Effect of adding G^2 constraints on curves

如何在添加边界 G^2连续条件的同时又能保证 B 样条曲线重构质量一直是研究的难点。本文根据 G^2约束条件,插入最优节点,微调控制点,既满足 G^2连续条件又能保证截面数据重构质量。

3.1 节点插入

设插入节点前定义在节点矢量 $\boldsymbol{U} = \left\{\underbrace{0,\cdots,0}_{p+1}, U_{p+1}, \cdots, U_n, \underbrace{1,\cdots,1}_{p+1}\right\}$的 B 样条曲线为

$$C(u) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(u)P_i。 \tag{13}$$

为方便满足 G^2连续约束并减少影响 B 样条曲线的区域,本文插入的节点 $\bar{u}$ 满足 $0 < \bar{u} \leqslant U_4$ 的条件,根据节点插入公式[10]141插入节点 $\bar{u}$,设新的节点矢量为 $\boldsymbol{U}$,有

$$\begin{cases} \overline{U}_4 = \bar{u} \\ \overline{U}_{i+1} = U_i, i = p+1, \cdots, n \end{cases}。 \tag{14}$$

设新的控制点为 D,如图 2 所示,控制点变化有

$$\begin{cases} D_0 = P_0 \\ D_1 = \dfrac{\bar{u}}{U_4}P_1 + \left(1 + \dfrac{\bar{u}}{U_4}\right)P_0 \\ D_2 = \dfrac{\bar{u}}{U_5}P_2 + \left(1 + \dfrac{\bar{u}}{U_5}\right)P_1 \\ D_3 = \dfrac{\bar{u}}{U_6}P_3 + \left(1 + \dfrac{\bar{u}}{U_6}\right)P_2 \\ D_{i+1} = P_i, \quad i = 3, 4, \cdots, n \end{cases}。 \tag{15}$$

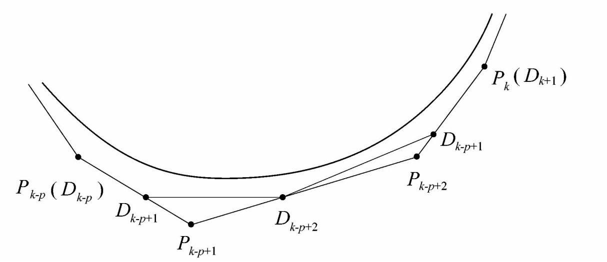

图 2 节点插入后控制点变化情况

Figure 2 Change of control point after node insertion

根据公式(15),插入节点 $\bar{u}$。此时,插入节点同时会增加控制点,从而增加形状控制的灵活性。而 B 样条曲线在集合和参数化方面均不发生改变,依然满足 G^1连续约束条件。

3.2 调整控制点

根据公式(9)可知,为使得曲线严格满足 G^2连续约束条件,可微调控制点 D_1或 D_2。根据曲率相等公式,可知 $d(D_2 - L) = \dfrac{3|c_0|\overline{U}_5|D_1 - D_0|^2}{U_4} = \dfrac{3|c_0|U_4|D_1 - D_0|^2}{\bar{u}}$。根据 B 样条曲线的局部修改性可知,调整控制点 D_1比调整 D_2影响的区间更小,因此,本文中调整 D_1以满足边界 G^2连续约束,具体方案如下:

假设控制点 D_2到分段点处切线 L 的投影距离为 $\overline{d}=d(D_2-L)$，将控制点 D_1在圆弧上 D_0点处切线 L 上移动，使其满足 $|D_1-D_0|=\sqrt{\dfrac{\overline{u}\overline{d}}{3|c_0|U_4}}$，如图 3 所示。

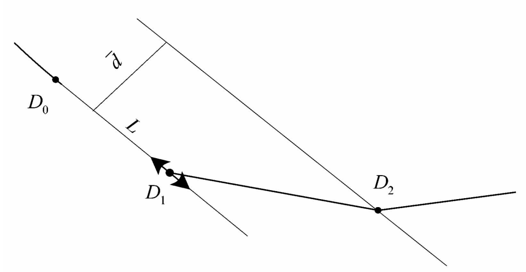

图 3 调整控制点 D_1方案

Figure 3 Scheme of moving control point D_1

3.3 建立求解模型

为寻找最优插入节点，根据上述求解过程，建立如下数学模型：

$$\min f(\overline{u}) = \sum_{i=0}^{k}[Q_i - C(ub_i)]^2 = \sum_{i=0}^{k}\Big[Q_i - \sum_{i=0}^{n}\overline{N}_{i,3}(ub_i)D_i\Big]^2;$$

约束条件 $0<\overline{u}\leqslant U_4$。 (16)

式中：D_i—调整后的 B 样条曲线的控制点 $\boldsymbol{D}=\{D_0,\cdots,D_n\}$；

Q_i—调整 D_1影响范围内的二维点列 $\boldsymbol{Q}=\{Q_0,\cdots,Q_k\}$。

4 实例验证

为验证上述方法的可行性与有效性，给出以下实例分析。参与分析的数据为使用三坐标测量机实际测得的仿涡轮叶片（已知 CAD 模型）截面数据。这里参与比较的情况有 2 种：根据未插入节点直接调整控制点满足边界 G^2约束下的重构情况；本文方法添加 G^2约束的重构情况。对截面数据重构结果评价的主要内容有：数据点到重构曲线的距离误差。图 4 所示为截面数据重构示意图。

图 5 中，虚线为未插入节点的 G^2约束下的逼近误差情况，实线为插入最优节点的 G^2约束下的逼近情况。由图 5 可知，通过本文方法添加 G^2约束后，数据点到重构曲线的误差不会明显变大，在添加边界 G^2约束的同时，有效的保证了截面重构的质量。该方法添加边界 G2 连续约束无需人工交互，大大提高了重构效率，在实际应用中具有重要作用。

5 结语

本文提出了一种快速满足边界 G^2连续约束条件

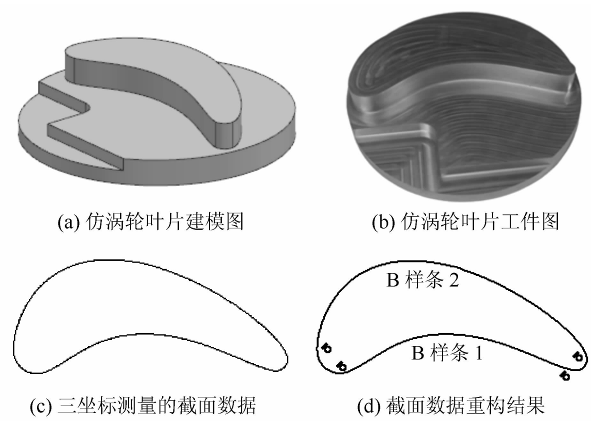

图 4 仿涡轮叶片截面数据重构结果

Figure 4 Reconstruction of sectional data of turbine blade

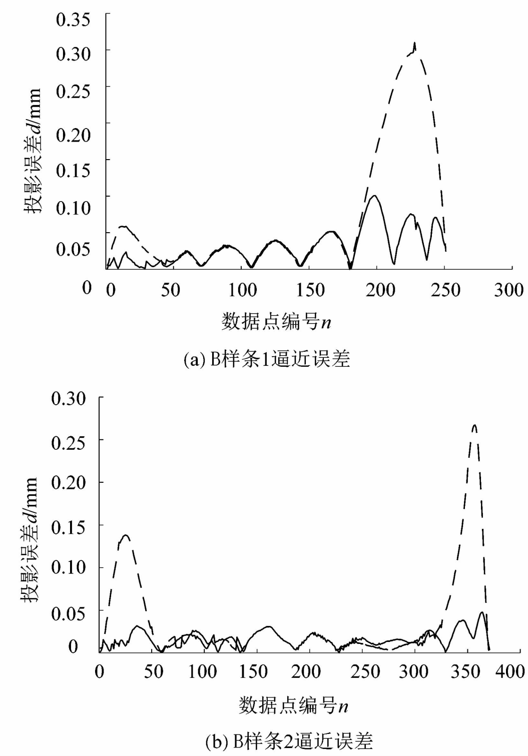

图 5 数据点到重构曲线误差分析

Figure 5 Error analysis of data points to reconstructed curve

并保证截面数据重构精度的方法，解决了包含圆弧与 B 样条曲线的截面特征重构问题。该方法具有以下几个优点：

1）精度。插入满足近似 G^2约束条件的节点，保证了整个截面数据的拟合质量，为 CAD 模型构建奠定良好基础；

（下转第 21 页）