

[研究·设计]

DOI:10.3969/j.issn.1005-2895.2018.01.001

机械系统结构动力学方程的李群分析法

郑明亮

(浙江理工大学 机械与自动控制学院, 浙江 杭州 310018)

摘要:为给复杂机械系统动力学特性定量和定性分析提供一个强有力的新途径,笔者将现代李群分析方法引入到机械结构动力学中。首先,通过矩阵解耦技术得到有限自由度机械结构振动系统在无限小群变换下导致的守恒量形式;其次,利用机械连续结构体三维弹性动力学方程允许的李点构造出方程组的系列群不变解。结果表明借助李群分析可以得到机械系统结构动力学更深层次的力学规律和运动现象。本研究不仅可以得到结构振动响应的精确解,同时也为数值计算提供了有效的验证手段。

关键词:结构动力学;李群分析法;对称性;守恒量;不变解

中图分类号:TB122

文献标志码:A

文章编号:1005-2895(2018)01-0001-04

Lie Group Analysis Method for Structural Dynamic Equation of Mechanical System

ZHENG Mingliang

(School of Mechanical Engineering and Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: To provide a new approach for the quantitative and qualitative analysis of dynamic characteristics of complex mechanical systems, the modern Lie Group analysis method was introduced into the dynamic analysis of mechanical structures in this paper. First, the conserved quantity form was obtained resulted in limited degree of freedom mechanical vibration system under infinitesimal transformations by matrix decoupling technique; secondly, the Lie point symmetry using continuous mechanical structure of three-dimensional elastodynamic equation allowed the equations of the series of group invariant solutions being constructed. The results show that the mechanical and dynamic phenomena can be obtained by Lie Group analysis. The study can not only get exact solutions of mechanical vibration response, but also provides an effective means of authentication for the numerical calculation.

Keywords: structural dynamics; Lie Group analysis; symmetry; conserved quantity; invariant solution

为了使机械系统更精确、稳定、可靠地工作,其结构特性首要问题是振动力学计算分析,这是因为动态响应直接关系到机械系统的强度、刚度、运动形态和振动能量水平。从数学上看,机械振动系统时间响应历程分析的基本任务就是求解微分方程。目前,已发展了多种计算方法^[1]:振型叠加法、状态空间法、复模态法、直接积分法、一阶常微分方程组初值问题的数值解法和时域有限元法。然而这些方法只能各自解决特有情况下的动力学方程计算,对一般机械系统并不是普

遍适用的。19世纪的数学家索菲思·李在连续群理论中,首次阐述了微分方程的对称性概念,并利用这一特性给出了方程积分的一般方法,即李群分析法^[2]。该法在处理线性和非线性、常系数和变系数方程是等同处理的,对常微分和偏微分方程都适用。事实上,今天李群分析理论已成为求解(常/偏)微分方程或(微分方程组)解析解的唯一通用和有效方法。

李群分析法在结构动力学中的应用,主要开始于前苏联的学者 Chirkunov^[3]首先利用 Lie-Ovsyan-nikov

收稿日期:2017-04-11;修回日期:2017-06-20

基金项目:国家自然科学基金项目(11272287);国家自然科学基金项目(11472247)。

第一作者简介:郑明亮(1988),男,安徽当涂人,博士研究生,主要研究方向为机械振动与动力学控制。E-mail:zhmlwxcstu@163.com

方法研究了弹性理论中的拉梅方程,获得了拉梅方程的允许群。随后,Prudnikov^[4]等研究了弹性静力学拉梅方程允许的某些无限维李变换群的分层问题,取得了新的解集。Senashov^[5]等学者系统地研究了弹性动力学基本方程的精确解,并引申到非线性、非均匀、各向异性弹性理论等领域。李厚国^[6]全面介绍了弹性理论方程的对称群形式和一系列不变解。付昊^[7]等研究单自由度无阻尼自由振动系统的 Lagrange 方程 Lie 对称性,并给出系统的守恒量。傅景礼^[8]等用 Lie 群方法研究汽车车体振动系统的对称性,寻找其存在的守恒量。李群知识在机械工程领域还有许多成功的应用,但在机械结构动力学分析中,目前缺乏系统性和全面性的完整阐述。本文中简要叙述李群分析的基本原理,并介绍在机械结构动力学响应特性分析中的应用形式、方法以及部分研究成果和发展方向等。

1 微分动力系统的李群分析的基本理论

根据 Lie Sophus 提出的方法,设微分动力系统确定的增广相空间 (y, z) 一般为一微分流形 M , 考虑 M 上的一个单参数连续变换群 $G = \{T_a\} : (y, z) \rightarrow (\tilde{y}, \tilde{z})$, 其切向量场为 $\frac{\partial T_a}{\partial a}|_{a=0} = (\xi(y, z), \eta(y, z))$, 引进群 G 的无穷小生成元 $X^{(0)}$:

$$X^{(0)} = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n; \eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n) = \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \eta^j \frac{\partial}{\partial z^j} \quad (1)$$

因为动力学方程包含微分算子,自然要对变换群进行延拓。设 $p_j^i = \frac{\partial z^j}{\partial y^i}$, 群 G 的一次延拓群 $G^{(1)}: (y, z, p) \rightarrow (\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{p})$, 其相应的一阶延拓无穷小生成元为 $X^{(1)} = \{\xi, \eta, \zeta\}$, 则

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \zeta_i^k \frac{\partial}{\partial p_i^k} \quad (2)$$

$$\text{其中, } \zeta_i^k = D_i(\eta^k) - p_j^k D_i(\xi^j), D_i = \frac{\partial}{\partial y^i} + p_i^k \frac{\partial}{\partial z^k}.$$

在机械结构动力学中,经常遇到振动方程是二阶微分方程组,那自然需要用到无穷小生成元的二阶延拓 $X^{(2)}$, 引进 $r_{ij}^k = \frac{\partial^2 z^k}{\partial y^i \partial y^j}$, 则

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \sigma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial r_{ij}^k} \quad (3)$$

$$\text{其中, } \sigma_{ij}^k = \tilde{D}_j(\eta_j^k) - r_{im}^k \tilde{D}_i(\xi^m), \tilde{D}_j = \frac{\partial}{\partial y^j} + p_j^k \frac{\partial}{\partial z^k} +$$

$$r_{ij}^k \frac{\partial}{\partial p_i^k}$$

不失一般性,研究二阶微分方程组 $S: F(y, z, p, r) = 0$ 在单参数连续变换群 G 下的形式不变性(对称性), 即: $F(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{p}, \tilde{r}) = 0$ 的充分必要条件为

$$\tilde{D}: X^{(2)} F(y, z, p, r) |_{F(y, z, p, r)=0} = 0. \quad (4)$$

其中, $\tilde{D}$ 是方程组代号。这时群 G 也称作方程的对称群, 对应的无穷小生成元 $X^{(0)}$ 也叫无穷小对称。方程组 $\tilde{D}$ 包含 4 个变量 y, z, p, r , 称为 Lie 确定方程组。一般来说 p, r 并不出现在 ξ, η 中, 因此确定方程组可以分解成几个方程而变为对 2 个未知函数 ξ 和 η 的超定偏微分方程组。这样对称群的无穷小对称求解就转化为求解确定方程组。另外, 如果在偏微分算子空间 X 中定义换位子运算即李括号 $[,]$ 得到相应李代数结构 $\{X\}$:

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1. \quad (5)$$

其中, X_1, X_2 都是空间 X 中的元素。

Lie Sophus 的重要研究发现就是确定方程组(4)无穷小生成元的解 $\{X^{(0)}\}$ 必构成一李代数。

2 有限自由度机械结构动力学方程的对称性和守恒量

n 自由度机械离散系统结构动力学的运动微分方程一般可表示为:

$$\left. \begin{aligned} \text{线性系统} \quad & [M] \{\ddot{q}(t)\} + [C] \{\dot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = \{F(t)\} \\ \text{非线性系统} \quad & [M] \{\ddot{q}\} = \{f(t, q, \dot{q})\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中 $\{q\}$ 为 n 维物理坐标列阵, $[M]$ 、 $[C]$ 和 $[K]$ 分别为质量、阻尼和刚度 n 阶矩阵(可以含时间 t 也可含参数), $\{F\}$ 为 n 维外载激励力列阵, $\{f\}$ 为 q 和 $\dot{q}$ 的非线性函数列阵。

考虑到机械工程中矩阵 $[M]$ 是结构材料本身的实际物理参数,一般满秩非奇异且为对角矩阵,利用逆矩阵 $[M]^{-1}$ 乘以公式(5)和(6)两边可得到二阶解耦形式的统一动力学方程为:

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t, q, \dot{q}), s = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

取时间和坐标的无限小变换:

$$t^* = t + \Delta t = t + \varepsilon \xi_0(t, q, \dot{q}), q_s^* = q_s(t) + \Delta q_s = q_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, q, \dot{q}). \quad (8)$$

其中, ξ_0, ξ_s 为无限小生成函数。

代入 Lie 对称性确定方程(4), 并展开可得

$$\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \xi_0 - 2\alpha_s \xi_0 = \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \alpha_s}{\partial q_k} \xi_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_k} (\xi_k - \dot{q}_k \xi_0) = 0. \quad (9)$$

连续变换的对称性都对应着一条守恒定律, 一个守恒量对应系统响应的一个首次积分, 进而可使微分

方程达到降阶和约化,守恒律是动力学系统更深层次的规律,在微分方程的可积性、线性化、运动常数以及稳定性方面有重要作用。Lie 对称性可直接导致一类守恒量,再结合初始条件,从而很容易解出原振动系统的精确响应解。如果无限小生成元 ξ_s 满足 Lie 对称性确定方程(9),并且可再找到某一个规范函数 $\mu = \mu(t, q, \dot{q})$ 使得:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \alpha_k}{\partial \dot{q}_k} + \frac{d}{dt} \ln \mu = 0. \quad (10)$$

$$\text{其中 } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}.$$

则系统 Lie 对称性可直接导出 Hojman 守恒量 I 如下:

$$I = \frac{1}{\mu} \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\mu \xi_s) + \frac{1}{\mu} \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\mu \frac{d}{dt} \xi_s) = \text{const}. \quad (11)$$

其中, const 表示常数。

3 机械结构连续体动力学方程的对称性和不变解

机械结构体以位移为坐标响应的无阻尼线性弹性动力学方程组被称为拉梅方程,一般情况下,考虑阻尼、外载荷和边界条件的方程形式为:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - c \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \mathbf{f}; \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{k}, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中: $\mathbf{u}|_{t=1} = \mathbf{u}^0(x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \in V + S$;

$\sigma_{ij} n_j = T(t, x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \in S_T$;

$u_i = u_i(t, x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \in S_u, S_T + S_u = S$ 。

x_1, x_2, x_3 表示空间坐标系; t 表示时间; ρ 表示密度; c 表示阻尼常数; λ, μ 是拉梅常数; $\mathbf{u}$ 表示位移; $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) 表示相应的应力和应变分量; S 为区域 V 的边界。

非线性弹性理论的基本控制方程是:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \sigma_{ij} \mathbf{j}; \\ \sigma_{ij} &= K \varepsilon_{ij} + \lambda e_{ij}; \\ \mathbf{e} &= \nabla \cdot \mathbf{u}, e_{ij} = u_{i,j}^i + u_{j,i}^j \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中,在笛卡尔坐标系 (x_1, x_2, x_3) 中, K 是体积压缩模量,为常数; $\lambda = \lambda(e_{ij})$ 为非负; $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ 表示位移向量, σ_{ij} 为应力张量分量, δ_{ij} 为 Kronecher 记号。

为方便,令 $x_0 = t, \mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, 则线性和非线性弹性动力学方程都可统一表述为:

$$F^\tau(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \partial^2 \mathbf{u}) = 0, (\tau = 1, 2, \dots, N). \quad (14)$$

其中, ∂, ∂^2 表示一阶和二阶偏微分算子。公式(14)是类似波动方程组的二阶双曲型偏微分方程组,即:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \partial^2 \mathbf{u}) = \partial_t^2 \mathbf{u} - c_2^2 \Delta \mathbf{u} - (c_1^2 - c_2^2) \nabla \otimes \nabla \mathbf{u} - f(\mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \partial^2 \mathbf{u}). \quad (15)$$

其中, c_1, c_2 表示任意常数, $\otimes$ 表示 Kronecher 面积。

按照李群分析的方法,无穷小对称生成元应满足确定方程:

$$X^{(2)} F^\tau(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \partial^2 \mathbf{u})|_{F^\tau=0} = 0. \quad (16)$$

方程(14)源于 Lie 对称变换群(1)的不变解 $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \Theta(\mathbf{x})$ 满足:

$$\left. \begin{aligned} \xi_i(\mathbf{x}, \Theta(\mathbf{x})) \frac{\partial \Theta^j(\mathbf{x})}{\partial x_i} &= \eta^j(\mathbf{x}, \Theta(\mathbf{x})), j = 1, 2, 3; \\ F^\tau(\mathbf{x}, \Theta(\mathbf{x}), \partial \Theta(\mathbf{x}), \partial^2 \Theta(\mathbf{x})) &= 0, \tau = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

关于不变解的特征方程为:

$$\frac{dx_0}{d\xi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})} = \frac{dx_1}{d\xi_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})} = \frac{dx_2}{d\xi_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})} = \frac{dx_3}{d\xi_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})} = \frac{du^1}{d\eta^1(\mathbf{x}, \mathbf{u})} = \frac{du^2}{d\eta^2(\mathbf{x}, \mathbf{u})} = \frac{du^3}{d\eta^3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}. \quad (18)$$

解此一阶常微分方程组,若有 6 个泛函独立的常数:

$$\rho_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}), v_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}), v_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}), v_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (19)$$

则偏微分方程组的不变解可由不变形式隐式方程给出:

$$\Theta^r(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \Theta^j(\rho_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \rho_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})). \quad (20)$$

4 结语

李群是一种特殊的连续群,其结构丰富,在数理科学和工程科技中具有广阔的运用前景。它继承了代数与几何方面的结构属性以及分析领域的可微属性。目前,李群分析方法在机械动力学(多体系统、柔性机构等)领域中应用已比较广泛,并取得了丰富的研究成果,基本上解决了常见的结构动力学理论问题,但在诸如高阶振动方程、随机结构振动、热弹性、热黏弹性和非局部弹性理论等方面还有很大的发展空间。本文主要介绍了结构动力学方程的 Lie 群分析方法,求解程序标准化,不仅可以得到结构振动响应的精确解,同时这也为数值计算提供了有效的验证手段。值得广大科技工作者借鉴和学习。

(下转第 12 页)