

[研究·设计]

DOI:10.3969/j.issn.1005-2895.2019.02.002

新型六自由度铆孔机器人刚度特性研究

梁 诤, 许 勇*, 吕叶萍

(上海工程技术大学 机械与汽车工程学院, 上海 201620)

摘 要:针对高端制造业对大型、薄壁及复杂曲面工件的精密、高效和柔性加工的需求,课题组设计了一种基于6-SPU并联机构的新型步行式铆孔机器人。首先,建立了机构的位置逆解的数学模型;然后,通过螺旋理论推导出机构的雅可比矩阵,同时考虑支链的刚度系数,建立了机构的全刚度矩阵及刚度模型;最后,对机构在静载荷作用下动平台变形进行了分析,同时分析了机构的刚度特性分布及相关参数对其的影响,并和有限元仿真结果进行对比,验证了刚度模型的合理性。该研究为自动铆接机器人的结构优化及性能分析提供了参考依据。

关 键 词:铆孔机器人;6-SPU 并联机构;位置逆解;雅可比矩阵;刚度模型

中图分类号:TP242.2

文献标志码:A

文章编号:1005-2895(2019)02-0006-06

Analysis of Stiffness Characteristics of New Six-Degree-of-Freedom Riveting Robot

LIANG Zheng, XU Yong, LÜ Yeping

(School of Mechanical and Automotive Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China)

Abstract: A new walking-type riveting robot based on 6-SPU parallel mechanism was designed to meet the demands of precision, high efficiency and flexible machining of large, thin-wall and complex curved workpieces in high-end manufacturing industry. First, a mathematical model of the inverse position of the mechanism was established. Then, the Jacobian matrix of the mechanism was derived through the spiral theory, the stiffness coefficient of the branch was also considered. The full stiffness matrix and stiffness model of the mechanism were established. Finally, the deformation of the moving platform under static load was analyzed and the stiffness distribution of the mechanism and the influence of related parameters were analyzed at the meantime. The finite element simulation results were compared to verify the rationality of the stiffness model. The study provides the necessary theoretical basis for the structural optimization and performance analysis of the automatic riveting robot.

Keywords: riveting robot; 6-SPU parallel mechanism; position inverse solution; Jacobian matrix; stiffness model

为满足一些高端制造业对大型、薄壁及复杂曲面工件的精密、高效和柔性加工的需求,自动化铆接机器人正日益成为智能制造的主流装备。

刚度是满足机器人作业单元的重要性能指标。机器人的刚度随其位形而变化^[1],因此需在机构设计阶段快速预估出末端刚度在工作空间内的变化规律,以便为机械结构的详细设计提供必要的理论依据。

机构整机变形量与其末端执行器所受静载荷间的映射关系称为机构的静刚度,是影响机器人定位精度的重要因素^[2]。目前机构静刚度分析方法主要包括

两种:有限元分析法和模型解析法。为便于分析整个工作空间中静刚度随位形的变化规律和参数优化,一些学者提出了静刚度模型的解析或半解析方法。

Gosselin^[3]采用虚功原理构建了并联机构末端力与动平台变形之间的映射关系。周玉林等^[4]应用小变形叠加原理,推导出三自由度球面并联机构整体柔度及刚度矩阵,并采用正交变换方法,获得了机构的6个主刚度指标、最大/最小刚度及其方向。窦永磊等^[5]计入所有支链构件及关节的弹性,基于全变形雅可比矩阵,构造出多种混联机器人的半解析静刚度模

收稿日期:2018-11-05;修回日期:2019-01-08

第一作者简介:梁诤(1995),女,山东曹县人,主要研究方向为并联机器人机构。E-mail:bruceyuyong@163.com

型,通过算例揭示了整机静刚度在任务空间中随位形的变化规律。Cao 等^[6]提出了对过约束 SCARA 运动并联机构进行刚度建模的一种通用方法。张东胜等^[7]针对基于 2RPU/UPR 机构的五自由度混联机器人,分别求解了并联、串联部分的静刚度模型,从构造系统的力旋量系和弹性变形协调条件入手,简单且快速地建立了混联机器人的整体刚度模型,并求解了整机静刚度在任务空间中随位形变化分布图。张俊等^[8]分别采用虚拟关节法和有限元法计入 Exechon 并联模块各关节和支链体的柔性,通过推导动平台和支链装配体间的变形协调方程,构建出系统的弹性静力学模型,由系统方程抽取动平台刚度矩阵,据此预估了 Exechon 并联模块在典型位姿和工作全域内的刚度性能。

课题组以基于 6-SPU 并联机构的新型步行式铆孔机器人为研究对象,研究分析其在工作空间内的刚度分布情况,并对影响并联机构刚度特性的一些参数进行了进一步分析。首先,建立了机构的位置逆解模型;然后,通过机构的力雅可比矩阵推导了机构的雅可比矩阵,同时考虑支链的刚度系数,构建了 6-SPU 并联机构刚度矩阵;最后,在一定载荷作用下对机构动平台的变形大小进行了分析,同时分析了机构的刚度特性分布及相关参数对其的影响,并通过有限元仿真进行了验证对比。

1 机器人构型简介及位置逆解

1.1 机器人构型

为完成大型薄壁自由曲面工件表面的铆接制孔任务,课题组设计了一种基于 6-SPU (S 表示球面副, P 表示移动驱动副, U 表示万向铰) 六自由度并联机构的步行式铆接机器人^[9]。如图 1 所示,该机器人足端锁紧环可与定平台上的锁紧销可靠嵌入及脱离,实现摆腿/落腿运动。机器人行至目的工位时动平台调姿、各足支撑于定平台,固结于动平台的铆枪执行加工任务。

课题组提出的 3 闭环支链 6-SPU 并联机构,每条支链(步行腿)均为一个含复合球面副 S 的 2-SPU 两自由度并联机构,可实现沿某一锁紧销队列的直线步行,且保持落足姿态恒与定平台垂直。

1.2 位置逆解

如图 2 所示,建立定平台坐标系 $\{O-xyz\}$: 坐标系原点 O 为等边三角形定平台的形心, x 轴正方向由 O 指向复合球面副形心 $B_1(B_2)$; z 轴正方向垂直定平台向上; y 轴正方向由右手法则确定。建立动平台坐标系 $\{P-uvw\}$: 坐标系原点 P 为六边形动平台的形心, u

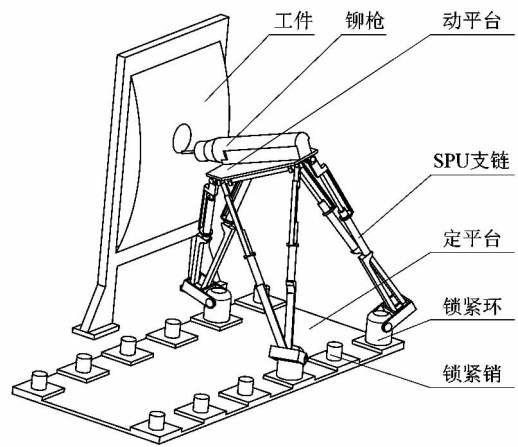


图 1 铆接机器人加工示意图

Figure 1 Schematic diagram of riveting robot processing

轴正方向由 P 指向动平台上两 U 副形心 A_1 和 A_2 的连线中点, w 轴正方向垂直动平台向上, v 轴正方向由右手法则确定。以支链一为例说明建立支链坐标系 $\{B_j-x_{B_j}y_{B_j}z_{B_j}\}$ ($j=1\sim6$, 下同) 的方法: 坐标系原点取 B_1, y_{B_1} 轴正方向由 B_1 指向 B_3, z_{B_1} 轴正方向垂直于 $B_1B_3B_5$ 所在平面且向外, x_{B_1} 轴正方向由右手法则确定。

记定、动平台外接圆半径分别为 R_0 和 R_p , 动平台长边所对圆心角为 2θ 。机构初始位形为动、定平台平行, 且动、定坐标系各坐标轴分别平行。

由图 2 可知动平台上各 U 副形心 A_i 在动坐标系 $\{P-uvw\}$ 中的位置矢量 A_i^P 为:

$$A_1^P = (R_p \cos \theta, -R_p \sin \theta, 0);$$

$$A_2^P = (R_p \cos \theta, R_p \sin \theta, 0);$$

$$A_3^P = (R_p \cos (2\pi/3 - \theta), R_p \sin (2\pi/3 - \theta), 0);$$

$$A_4^P = (-R_p \sin (\pi/2 - \theta), R_p \cos (2\pi/3 - \theta), 0);$$

$$A_5^P = (-R_p \sin (\pi/6 + \theta), -R_p \cos (\pi/6 + \theta), 0);$$

$$A_6^P = (R_p \sin (\theta - \pi/6), -R_p \cos (\theta - \pi/6), 0).$$

定平台内各复合球面副形心 B_j ($j=1\sim3$) 在定坐标系 $\{O-xyz\}$ 中的位置矢量 B_j^O 为:

$$B_1^O = B_2^O = (R_0, 0, 0);$$

$$B_3^O = B_4^O = (-R_0/2, \sqrt{3}R_0/2, 0);$$

$$B_5^O = B_6^O = (-R_0/2, -\sqrt{3}R_0/2, 0).$$

6-SPU 机构满足如下位置矢量方程:

$$B_j^O + q_i n_i = P^O + PA_i^O. \quad (1)$$

式中: $PA_i^O = R \cdot PA_i^P$; PA_i^P, PA_i^O 分别为 PA_i 在动、定平台坐标系内的矢量; 动平台形心在定坐标系中位置矢量 $P^O = (x, y, z)$, q_i 为驱动杆杆长, n_i 为驱动杆的单位

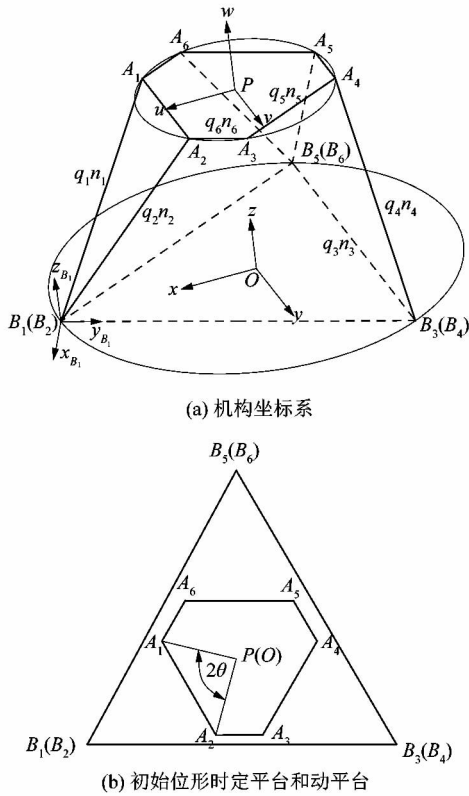


图2 机构坐标系设置及初始位形

Figure 2 Mechanism coordinate system setting and initial configuration

方向矢量。

${}^P_o R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)$ 是动坐标系相对于定坐标系的姿态变换矩阵:

$${}^P_o R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ c\beta s\gamma & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ -s\beta & s\alpha c\beta & c\alpha c\beta \end{bmatrix}.$$

式中 $s\alpha, c\alpha$ 分别表示 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$; 其余表达类似。

由式(1)可得驱动杆杆长 q_i 及单位方向矢量 n_i :

$$q_i = \|P^O + PA_i^O - B_j^O\|; n_i = \frac{P^O + PA_i^O - B_j^O}{q_i}. \quad (2)$$

2 机构静刚度建模

2.1 雅可比矩阵

6-SPU 并联机构有 6 个自由度, 记动平台 6 维输出位移矢量为 $X = (x_p \ y_p \ z_p \ \alpha \ \beta \ \gamma)^T$; 机构 6 维驱动位移矢量 $Q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T$ 。

则机构的 6 维驱动速度矢量

$$\dot{Q} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dot{q}_4 \ \dot{q}_5 \ \dot{q}_6]^T. \quad (3)$$

动平台输出速度矢量

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \omega_p \\ v_p \end{bmatrix}. \quad (4)$$

式中: ω_p, v_p 分别是动平台的角速度、线速度矢量。

并联机构的运动关系可表示为

$$J_x \dot{X} = J_q \dot{Q}. \quad (5)$$

式中: J_x 和 J_q 分别为正向和逆向雅可比矩阵。

又并联机构的雅可比矩阵 J 表示末端执行器速度 $\dot{X}$ 与关节驱动速度 $\dot{Q}$ 的线性关系, 即

$$J \dot{X} = \dot{Q}. \quad (6)$$

联立式(5)和式(6)可得机构的雅可比矩阵为

$$J = J_q^{-1} J_x. \quad (7)$$

为推导确定 J_x 和 J_q , 需把支链内所有单自由度运动副分别用旋量 $\$i$ ($i=1 \sim 6$) 表示。

如图 3 所示, $\$_{1i,1(i+1)}$, $\$_{2i,2(i+1)}$, $\$_{3i,3(i+1)}$ 为复合球面副 S 的 3 个转动旋量; $\$_{4i}$ 和 $\$_{4(i+1)}$ 分别为每个分支支链的驱动移动旋量; $\$_{5i}$, $\$_{6i,6(i+1)}$ 和 $\$_{5(i+1)}$, $\$_{6i,6(i+1)}$ 分别为支链内 2 个万向副的 2 个转动旋量。

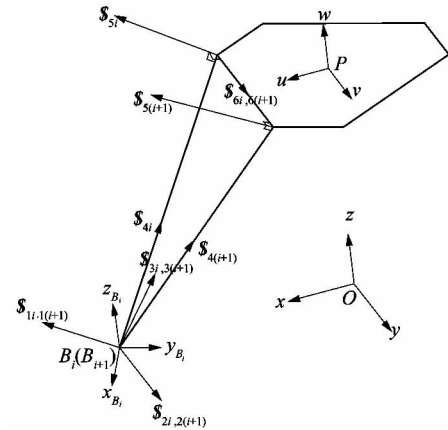


图3 支链旋量

Figure 3 Branch spinor

将每个分支支链均视为开链, 则动平台的瞬时旋量可表示为

$$\$P = \sum_{i=1}^6 \dot{q}_i \$i. \quad (8)$$

根据参考文献[10], 将式(8)两边同时对 $\$_{wi} =$

$\begin{bmatrix} n_i \\ OB_i \times n_i \end{bmatrix}$ 求互易积, 可得

$$\$_{wi} \cdot \$P = \$_{wi} \cdot \$_{4i}. \quad (9)$$

则根据以上各式可以确定 J_x 和 J_q :

$$J_x = \begin{bmatrix} (OB_1 \times n_1)^T & n_1^T \\ (OB_2 \times n_2)^T & n_2^T \\ (OB_3 \times n_3)^T & n_3^T \\ (OB_4 \times n_4)^T & n_4^T \\ (OB_5 \times n_5)^T & n_5^T \\ (OB_6 \times n_6)^T & n_6^T \end{bmatrix}; J_q = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}.$$

2.2 刚度模型

并联机构的静刚度矩阵是分析并联机构静刚度特性的基础。由于影响并联机构静刚度的因素很多且并非简单叠加关系,很难通过考虑所有因素获得理想的分析结果^[11]。由于每条SPU支链都有6个自由度,故假设每条支链的变形只和驱动力有关。在驱动力 f_i 的作用下会产生变形,则变形公式为:

$$f_i = k_i \delta_{n_i}; k_i = \frac{EA}{q_i} \quad (10)$$

式中: δ_{n_i} 表示在驱动力的作用下支链的变形; k_i 表示支链的刚度系数; E 表示弹性模量; A 表示支链的横截面积。

根据参考文献[12]可知,并联机构的全刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}^T \mathbf{K}_a \mathbf{J} \quad (11)$$

式中 $\mathbf{K}_a = \text{diag}[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ k_5 \ k_6]$ 。

假设并联机器人动平台受到一个外部载荷作用,在静坐标系中表示为 $\mathbf{W} = [\mathbf{F} \ \mathbf{M}]^T$,其中 $\mathbf{F}$ 表示动平台所受外力, $\mathbf{M}$ 表示对动平台中心点的外力矩;且 $\mathbf{F} = [F_x \ F_y \ F_z]^T$, $\mathbf{M} = [M_x \ M_y \ M_z]^T$ 。令并联机器人动平台在静坐标系下的微小位移分别表示为 $\boldsymbol{\delta} = [\delta_x \ \delta_y \ \delta_z \ \delta_\alpha \ \delta_\beta \ \delta_\gamma]^T$,则有

$$\mathbf{W} = \mathbf{K} \boldsymbol{\delta} \quad (12)$$

3 数值算例及仿真验证

3.1 数值算例

在并联机器人的相关参数确定之后,其刚度随着位姿变化而改变。目前常作为并联机器人刚度评价指标的主要有刚度矩阵条件数和特征值等^[13]。笔者将采用6-SPU并联机构全刚度矩阵的最大特征值、最小特征值和最小特征值与最大特征值之比 K_{KSI} 指标作为并联机构的刚度评价指标^[14]。6-SPU并联机器人的相关参数如表1所示。

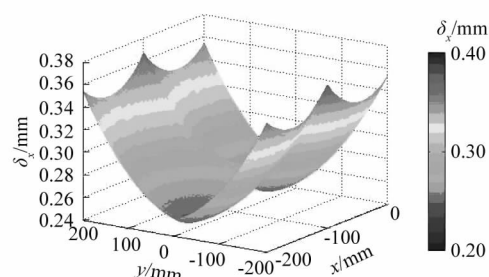
表1 并联机器人相关参数

Table 1 Parallel robot related parameters

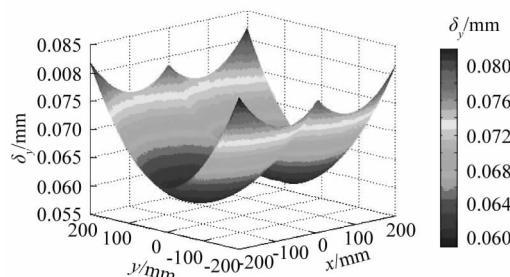
R_p/mm	R_o/mm	E/GPa	A/mm^2
300	330	203	4 000

在已知6-SPU并联机器人动平台姿态及工作载荷时,其各方向变形量可由式(12)计算得出。图4描绘了并联机构在已知动平台姿态 $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 10^\circ$, $\gamma = 10^\circ$ 时受到恒定静载荷(外界载荷) $F_x = 1\ 000\ \text{N}$ 的变形量分布状况(α, β 和 γ 为动平台相对于静坐标系的姿态角)。为了使动平台变形情况可以更加明确直观的描述,笔者选取了在工作空间内的 x, y 在 $z = 0.45\ \text{m}$

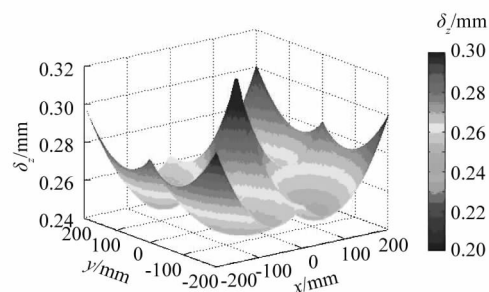
平面上变形范围,并取沿各轴变形的绝对值进行分析讨论。



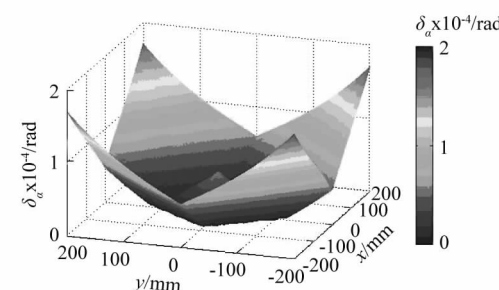
(a) 沿x轴的线变形



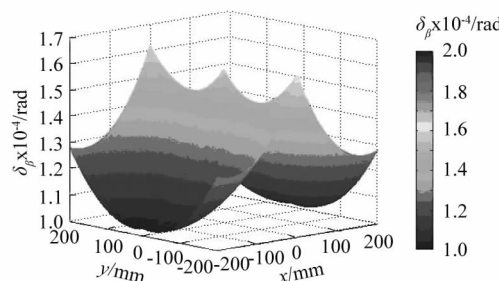
(b) 沿y轴的线变形



(c) 沿z轴的线变形



(d) 绕x轴的角变形



(e) 绕y轴的角变形

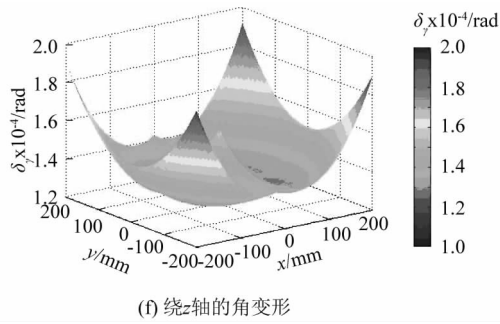


图4 动平台在静载荷下的变形分布

Figure 4 Deformation distribution of moving platform under static load

从图4可知,机构的动平台在 $z=0.45\text{ m}$ 平面上受到静载荷时,其在 x 轴方向产生最大线变形,且最大值为 0.36 mm ;其在绕 z 轴方向产生最大角变形。图中可看出,其在每个轴所产生的线变形和角变形分布情况都关于 $x=0$ 对称。同时在 y 位置确定的情况下, x 处于边缘或者中心处,产生的变形较大;同样情况下沿 y 轴的变形分布情况也满足此规律。

根据机构的安全设计准则,应保证并联机器人的最小刚度满足所需的安全要求及精度要求。课题组采用并联机器人刚度矩阵的最小特征值 $K_{\min}$ 、最大特征值 $K_{\max}$ 和 K_{KSI} 指标作为评价机器人在工作空间内刚度分布的指标,分析并联机构的刚度分布情况。 K_{KSI} 指标的定义^[15]为

$$K_{\text{KSI}} = \frac{K_{\min}}{K_{\max}} \quad (13)$$

在 $z=0.45\text{ m}$ 平面的最大及最小刚度特征值分布如图5所示。通过观察我们可以发现最小特征值 $K_{\min}$ 、最大特征值 $K_{\max}$ 均在 $x=0, y=0$ 处取得最小值。从图6可知,在 $z=0.45\text{ m}$ 及 $z=0.50\text{ m}$ 平面上 K_{KSI} 分布规律一致,且在中心点 $x=0, y=0$ 处及边缘处较小,说明在这些位置机构的刚度特性较差;机构的刚度特性在 $z=0.45\text{ m}$ 时更佳。图7描绘了在动平台姿态 $\alpha=10^\circ, \beta=10^\circ, \gamma=10^\circ, z=0.45\text{ m}, x=0.10\text{ m}, y=0.10\text{ m}$ 情况下,随着动、定平台半径 R_p 与 R_o 的变化 K_{KSI} 的分布情况。观察可以发现在动平台半径确定时,定平台半径越大,机构的刚度特性越好,且在 $R_o=0.34\text{ m}, R_p=0.30\text{ m}$ 时 K_{KSI} 取得最大值。

3.2 有限元仿真验证

选取动平台姿态 $\alpha=10^\circ, \beta=10^\circ, \gamma=10^\circ, z=0.45\text{ m}, x=0\text{ m}, y=0\text{ m}$,采用ANSYS Workbench进行有限元仿真。通过SolidWorks软件构建6-SPU机构的三维模型,并根据实际要求装配其三维模型。然后依据式

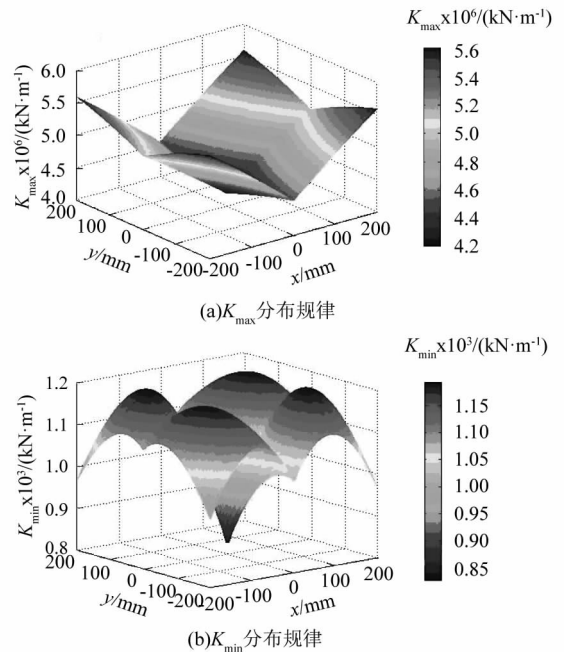
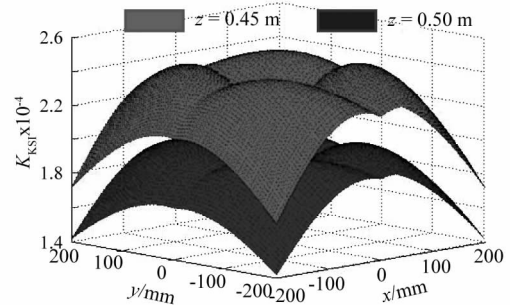
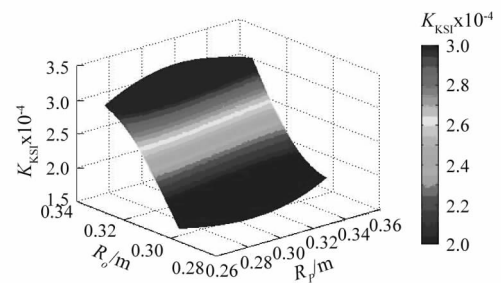


图5 最大及最小刚度特征值分布图

Figure 5 Distribution of maximum and minimum stiffness eigenvalues

图6 $z=0.45\text{ m}$ 及 $z=0.50\text{ m}$ 平面 K_{KSI} 分布图Figure 6 K_{KSI} distribution map at $z=0.45\text{ m}$ and $z=0.50\text{ m}$ 图7 K_{KSI} 随 R_o 与 R_p 的变化规律Figure 7 Change of K_{KSI} with R_o and R_p

(2) 计算出 6-SPU 机构的位姿参数,将机构按照位姿参数进行调整,并根据其运动副设定构件之间的连接,随后运用 ANSYS Workbench 进行有限元仿真。其构件材料设定为结构钢,弹性模量 $E = 203 \text{ GPa}$,密度为 $7\,850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,泊松比为 0.3,屈服极限为 350 MPa。并联机构整体使用四面体单元进行网格划分,整机共有 27 370 个单元和 80 092 个节点,如图 8 所示。

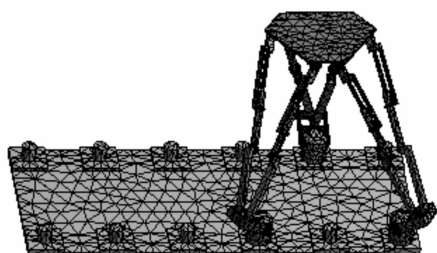


图 8 并联机构网格划分模型

Figure 8 Parallel mechanism meshing model

表 2 展示了数值计算与有限元仿真结果。从表中数值对比可以发现有限元仿真的计算结果略大于数值计算;同时两者的之间误差在允许的范围内,进而验证了所建立刚度模型的正确性和有效性。

表 2 数值计算与有限元仿真结果

Table 2 Numerical calculation and finite element simulation results

计算方式	x 方向线性 位移/mm	y 方向线性 位移/mm	z 方向线性 位移/mm
数值计算	0.284	0.069	0.317
有限元仿真	0.324	0.076	0.371
误差/%	12.350	9.380	14.560

4 结语

课题组针对高端制造业对大型、薄壁及复杂曲面工件的加工需求,提出了一种基于 6-SPU 并联机构的新型步行式铆孔机器人。先建立了机构的位置逆解的数学模型,然后通过螺旋理论推导出机构的雅可比矩阵,同时结合支链的刚度系数,构建出并联机构的刚度矩阵并写出其刚度模型。

最后,在机构受一定工作载荷情况下,对其动平台变形进行数值仿真。分析结果发现:机构的动平台最大线性变形发生在沿 x 轴方向,最大旋转变形发生在绕 z 轴的旋转方向,且沿各轴所发生的线性和旋转变形分布均相对于 $x = 0$ 对称。选取其刚度矩阵最小、最

大特征值以及 K_{KSI} 指标作为评价指标进行机构的刚度特性分析,分析结果发现最小特征值 K_{min} 、最大特征值 K_{max} 均在 $x = 0, y = 0$ 处取得最小值。不同 z 平面上 K_{KSI} 分布规律一致,且在中心点 $x = 0, y = 0$ 处及边缘处较小;在动平台姿态一定的情况下,分析了动、定平台半径与机构刚度特性分布之间的联系,在动平台半径确定时,定平台半径越大,机构的刚度特性越好。数值计算与有限元仿真的结果相比较,验证了所建立的机构刚度模型的合理性和正确性,为铆接机器人下一步的优化设计和开发应用打下基础。

参考文献:

- [1] 汪满新,王攀峰,宋铁民,等. 四自由度混联机器人静刚度分析[J]. 机械工程学报,2011,47(15):9-16.
- [2] 落海伟,张俊,王辉,等. 3-RPS 并联机构静刚度建模方法[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版),2015,48(9):797-803.
- [3] GOSSELIN C. Stiffness mapping for parallel manipulators [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation,1990,6(3):377-382.
- [4] 周玉林,高峰. 3-RRR 三自由度球面并联机构静刚度分析[J]. 机械工程学报,2009,45(4):25-32.
- [5] 赛永磊,汪满新,王攀峰,等. 一种 6 自由度混联机器人静刚度分析[J]. 机械工程学报,2015,51(7):38-44.
- [6] CAO Wenao, YANG Donghao, DING Huafeng. A method for stiffness analysis of overconstrained parallel robotic mechanisms with Scara motion[J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing,2018,49:426-435.
- [7] 张东胜,许允斗,姚建涛,等. 2RPU/UPR + RP 五自由度混联机器人静刚度分析[J]. 中国机械工程,2018,29(6):712-719.
- [8] 张俊,赵艳芹. Exechon 并联模块的静刚度建模与分析[J]. 机械工程学报,2016,52(19):34-41.
- [9] 刘文彩,许勇,陈佳丽,等. 基于 6-SPU 并联机构的飞机壁板铆接机器人逆运动学分析[J]. 机械设计与研究,2018,34(2):76-80.
- [10] 黄真,赵永生,赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京:高等教育出版社,2006:313.
- [11] 朱春霞,刘威,赵志宇. 3-TPT 并联机构静刚度特性分析与仿真[J]. 机械设计与制造,2016(7):139.
- [12] 王友渔,黄田,CHETWYND D,等. Tricept 机械手静刚度解析建模方法[J]. 机械工程学报,2008,44(8):13-19.
- [13] 郭江真,王丹,樊锐,等. 3PRS/UPS 冗余驱动并联机器人刚度特性分布[J]. 北京航空航天大学学报,2014,40(4):504.
- [14] 樊锐,刘欢,王丹. 3DOF 并联加载机构静力学和静刚度分析[J]. 北京航空航天大学学报,2014,40(7):865.
- [15] REZAEI A, AKBARZADEH A, AKBARZADEH-T M R. An investigation on stiffness of a 3-PSP spatial parallel mechanism with flexible moving platform using invariant form [J]. Mechanism and Machine Theory,2012,51:195-216.