［研究·设计］

DOI:10.3969/j.issn.1005-2895.2020.01.002

考虑体力的轴对称弹性问题杂交基本解有限元法

高可乐，王克用，李培超

（上海工程技术大学 机械与汽车工程学院，上海 201620）

摘　要：针对含体力轴对称弹性问题中精确解求解困难、传统有限元网格畸变免疫性差以及复杂问题网格密度大等问题，课题组提出了一种杂交 Trefftz 基本解有限元计算格式。在数值求解过程中，体力项的存在，会导致单元刚度方程涉及域积分，从而使杂交基本解有限元法只含边界积分的优势消失且计算效率降低。为保持该有限元法的优势和计算效率，可将问题的全解分为齐次解和特解 2 部分求解，来达到消除域积分的目的。对不同计算方法下得到结果进行对比，表明该方法准确、高效，对网格畸变有良好的免疫性。该有限元模型能更好地适用于对含体力轴对称弹性问题的数值求解。

关 键 词：轴对称弹性问题；体力；基本解有限元法；特解

中图分类号：TH113；O343　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1005-2895(2020)01-0005-08

Hybrid Fundamental Solution Finite Element Method for Axisymmetric Elasticity with Body Force

GAO Kele, WANG Keyong, LI Peichao

(School of Mechanical and Automotive Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China)

Abstract: Aiming at solving the difficulty of the exact solution, the poor mesh distortion immunity and the high grid density about complex problems of conventional finite element method in the axisymmetric elasticity problems with body force, a hybrid Trefftz fundamental solution finite element method was proposed to obtain the solution. In this process, the existence of the body force leads to the element stiffness equation involving domain integration, so that the boundary-only formulation advantage of the hybrid fundamental solution finite element method is eliminated and the computational efficiency is reduced. In order to maintain the advantages and computational efficiency of this finite element method, the complete solution of the problem can be divided into a two-part solution of the homogeneous solution and the particular solution to eliminate the domain integral. By comparing the results obtained by different calculation methods, it is indicated that the method has accuracy, higher efficiency and good mesh distortion immunity. The finite element model can be used to solve the problems of axisymmetric elasticity with body force.

Keywords: axisymmetric elasticity; body force; fundamental solution finite element method; particular solution

轴对称问题广泛存在于工程实践中，但获得复杂几何形状和边界条件轴对称问题的精确解不容易。尤其在考虑体力效应之后，控制方程因含非齐次项，使求解更加复杂，只能借助数值方法如有限元法、边界元法获得近似解。1977 年，Jirousek 和 Leon[1] 首次提出杂交 Trefftz 有限元法（HT-FEM）并成功应用于薄板体弯曲问题。与传统有限元法相比，Trefftz 有限元法表现出良好的网格畸变免疫性，稀疏网格也能达到理想精度等优点。目前，该方法已经解决了位势[2]、平面弹性[3]、接触[4-5]、复合材料[6] 和轴对称等问题[7]。近期，周俊臣等利用杂交基本解有限元法（HFS-FEM）分析了轴对称位势问题[8] 以及轴对称弹性力学问题[9]291。虽然 HFS-FEM 采用基本解构造单元域内插值函数，但本质上与 HT-FEM 基本思想相同。这 2 种 Trefftz 型有限元法处理齐次控制方程非常便捷，相应单元刚度方程仅涉及边界积分，使得原问题降维。然

收稿日期：2019-07-19；**修回日期**：2019-11-15

基金项目：上海市自然科学基金项目（19ZR1421400）。

第一作者简介：高可乐（1993），男，河南周口人，硕士研究生，主要研究方向为 Trefftz 有限元法。**通信作者**：王克用（1975），男，河北唐山人，博士，副教授，主要研究方向为 Trefftz 有限元法和多孔介质传热。E-mail：k.y.wang@126.com

而,当考虑体力时,弹性力学控制方程引入了非齐次项,这导致单元刚度方程出现域积分,Trefftz 型单元的优势不复存在。一般常采用域离散化法、双重互易法[10]以及特解法[11]等来消除域积分。特解法是随着边界元法发展起来的。后来,秦庆华和王辉[12]将其引入到 Trefftz 有限元法中。特解法理论清晰、易于理解和数值实现,在处理含体力的物理问题中备受关注。王克用等[13]采用径向基函数求得特解表达式分析了正交各向异性位势问题。王辉等[14]用特解法讨论了极小曲面问题。刘博等[15]分析了轴对称 Poisson 方程问题。课题组基于杂交基本解有限元模型对含体力的轴对称弹性力学问题进行了研究。

1　理论

1.1　控制方程

各向同性的线弹性力学问题的控制方程如下:

$$(\lambda+\mu)u_{j,ji}+\mu_{i,jj}+b_i=0。\tag{1}$$

式中:u_i 为位移;b_i 为体力;λ 和 μ 分别为拉梅常数和剪切弹性模量;逗号表示求导,$i,j=x,y,z$ 表示空间笛卡尔坐标系的 3 个维度。

此外,考虑 Dirichlet 边界条件和 Neumann 边界条件(在 Γ_u 上):

$$u_i=\bar{u}_i;\tag{2}$$

$$t_i=\bar{t}_i。\tag{3}$$

式中:$\Gamma=\Gamma_u\cup\Gamma_t$,$\Gamma_u\cap\Gamma_t=\varnothing$,$\Gamma$ 为求解域 Ω 的边界,Γ_u 和 Γ_t 分别表示 Dirichlet 边界条件和 Neumann 边界条件,字母上横线表示已知边界值。

控制方程(1)满足边界条件式(2)和(3)的位移解可写成齐次解和特解两部分的线性叠加。其中,齐次解 u^{h} 应满足

$$(\lambda+\mu)u^{\mathrm{h}}_{j,ji}+\mu^{\mathrm{h}}_{i,jj}=0。\tag{4}$$

此时,式(4)应满足如下边界条件:

$$u_i^{\mathrm{h}}=\bar{u}_i-u_i^{\mathrm{p}}(\text{在 }\Gamma_u\text{ 上});\tag{5}$$

$$t_i^{\mathrm{h}}=\bar{t}_i-t_i^{\mathrm{p}}(\text{在 }\Gamma_t\text{ 上})。\tag{6}$$

式中:u^{p} 和 t^{p} 分别为位移和面力的特解,且位移特解应满足:

$$(\lambda+\mu)u^{\mathrm{p}}_{j,ji}+\mu u^{\mathrm{p}}_{i,jj}+b_i=0。\tag{7}$$

式中:上标 h 和 p 分别代表齐次解和特解。

一旦求出位移特解 u_i^{p},应力特解 σ_{ij}^{p} 可由位移与应变关系及本构关系导得。这里需要提及的是,满足式(7)的特解与原边界条件无关且不唯一。

1.2　重力载荷下对应的位移特解

在笛卡尔直角坐标系下,假设重力沿 z 轴负方向分布,则体力分量可写成:

$$b_x=0;b_y=0;b_z=-\rho g。\tag{8}$$

式中:ρ 为弹性体密度;g 为重力加速度。

设 ν 为泊松比,则根据文献[16],其空间直角坐标系下的特解为:

$$\left.\begin{aligned}u_x^{\mathrm{p}}&=\frac{\rho g(1-2\nu)}{2\mu(1+\nu)}xz;\\u_y^{\mathrm{p}}&=\frac{\rho g(1-2\nu)}{2\mu(1+\nu)}yz;\\u_z^{\mathrm{p}}&=\frac{\rho g(1-2\nu)}{4\mu(1+\nu)}(z^2-x^2-y^2)。\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

对于图 1 所示的轴对称体,式(9)采用圆柱坐标系(r,θ,z)表示:

$$\left.\begin{aligned}u_r^{\mathrm{p}}&=\frac{\rho g(1-2\nu)}{2\mu(1+\nu)}rz;\\u_z^{\mathrm{p}}&=\frac{\rho g(1-2\nu)}{4\mu(1+\nu)}(z^2-r^2);\\u_\theta^{\mathrm{p}}&=0。\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

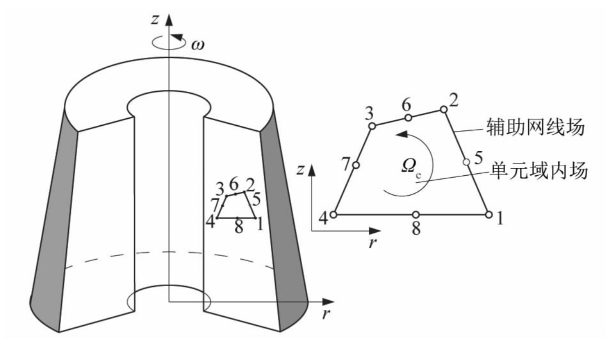


图 1　轴对称体及其 8 节点环形单元

Figure 1　Axisymmetric body and 8-node annular element

1.3　离心载荷下对应的位移特解

同样地,在笛卡尔直角坐标系下,考虑回转体绕轴 z 以角速度 ω 旋转,回转体的密度为 ρ,那么体力分量可写成:

$$\left.\begin{aligned}b_x&=\rho\omega^2x;\\b_y&=\rho\omega^2y;\\b_z&=0。\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

对于式(11)所示的离心力,Timoshenko 和 Goodier[17]讨论过相应的位移特解,这里给出其中 1 个特解:

$$\left.\begin{aligned}u_x^{\mathrm{p}}&=-\frac{\rho\omega^2(1-2\nu)}{16\mu(1-\nu)}(x^2+y^2)x;\\u_y^{\mathrm{p}}&=-\frac{\rho\omega^2(1-2\nu)}{16\mu(1-\nu)}(x^2+y^2)y;\\u_z^{\mathrm{p}}&=0。\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

同理,在圆柱坐标系下,式(12)转化成:

$$\left.\begin{aligned} u_r^{\mathrm{p}} &= -\frac{\rho\omega^2(1-2\nu)}{16\mu(1-\nu)}r^3;\\ u_z &= 0。\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

2 杂交基本解有限元列式

2.1 双位移场插值模式

与传统有限元法相比,杂交基本解有限元法最大的不同在于采用了双位移场插值模式:单元域内场和辅助网线场,如图 1 所示。单元域内场通过精确满足控制方程的截断完备解或基本解来构造插值函数;而辅助网线场是用来保证单元间的连续性,其插值函数采用常规方法建立。由于控制方程是非齐次的,单元域内场需将特解考虑进去,即:

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} + \boldsymbol{N}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{e}}。\tag{14}$$

且有辅助网线场不受非齐次项的影响,其特解部分自然包含在单元节点自由度列阵 $\boldsymbol{d}_{\mathrm{e}}$ 中:

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{e}} = \tilde{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{d}_{\mathrm{e}}。\tag{15}$$

式中:下标 e 代表单个单元;$\boldsymbol{u}_{\mathrm{e}} = [u_{er} \quad u_{ez}]^{\mathrm{T}}$;$\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{e}} = [\tilde{u}_{er} \quad \tilde{u}_{ez}]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{u}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} = [u_{er}^{\mathrm{p}} \quad \tilde{u}_{ez}^{\mathrm{p}}]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{N}_{\mathrm{e}}$ 为基本解表示的域内插值函数矩阵[18];$\boldsymbol{c}_{\mathrm{e}}$ 为待定系数列阵;~表示单元边界(网线)的变量。

域内插值函数矩阵 $\boldsymbol{N}_{\mathrm{e}}$ 需满足齐次控制方程

$$\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{e}} = 0。\tag{16}$$

式中 $\boldsymbol{L}$ 为微分算子矩阵,且有

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{1}{r} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix}。\tag{17}$$

$\boldsymbol{D}$ 为弹性矩阵,且

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}+2\mu & \hat{\lambda} & \hat{\lambda} & 0 \\ \hat{\lambda} & \hat{\lambda}+2\mu & \hat{\lambda} & 0 \\ \hat{\lambda} & \hat{\lambda} & \hat{\lambda}+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}。\tag{18}$$

式中:

$$\hat{\lambda} = \frac{2\nu}{1-2\nu}\mu。\tag{19}$$

由弹性力学位移与应变关系及本构关系可知,相应应力可写成微分算子形式:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} + \boldsymbol{DL}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{e}}。\tag{20}$$

式中:$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{e}} = [\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \sigma_{rz}]^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} = [\sigma_{er}^{\mathrm{p}} \quad \sigma_{e\theta}^{\mathrm{p}} \quad \sigma_{ez}^{\mathrm{p}} \quad \sigma_{erz}^{\mathrm{p}}]^{\mathrm{T}}$。

相应的表面力为:

$$\boldsymbol{t}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{t}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} + \boldsymbol{Q}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{e}}。\tag{21}$$

式中:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{e}} &= \boldsymbol{AT}_{\mathrm{e}};\\ \boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} n_r & 0 & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & n_r \end{bmatrix}。\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$\boldsymbol{t}_{\mathrm{e}} = [t_r \quad t_z]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{t}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} = [t_r^{\mathrm{p}} \quad t_z^{\mathrm{p}}]^{\mathrm{T}}$;$n_r$ 和 n_z 为 r 向和 z 向的方向余弦。

对于辅助网线场,可通过自然坐标系 $\xi \in [-1,1]$ 来构造。图 1 所示的 8 节点四边形单元,每条边布置 3 个节点,可构造出二次网线函数,其曲线如图 2 所示。

$$\left.\begin{aligned} \tilde{N}_1 &= \frac{\xi(1-\xi)}{2};\\ \tilde{N}_2 &= 1-\xi;\\ \tilde{N}_3 &= \frac{\xi(1+\xi)}{2}。\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

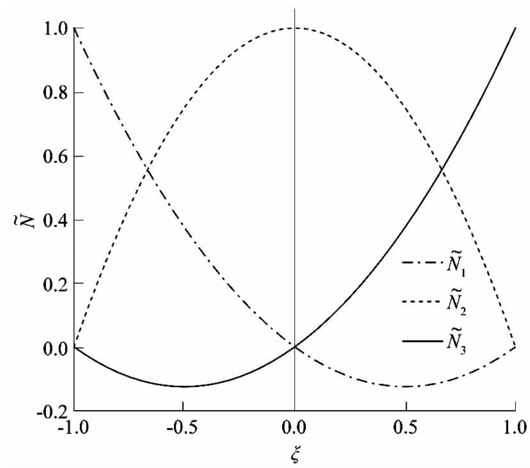


图 2　每一单元边的二次网线函数

Figure 2　Quadratic frame functions along each element side

2.2 修正变分泛函

单元域内场和辅助网线场之间的联系是通过修正变分泛函实现的。当控制方程为齐次时,通过高斯散度定理可消去变分泛函中的区域积分。然而,当控制方程为非齐次时,变分泛函中的区域积分无法消去。为了解决这个问题,我们只构造原问题的齐次方程情形的变分泛函,暂时排除边界条件中因体力项(非齐次项)诱发的特解部分。求解域变分泛函可写成所有单元泛函的叠加:

$$\prod\nolimits_{\mathrm{me}} = -\pi\iint_{\Omega_{\mathrm{e}}}[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{h}}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{h}}r\mathrm{d}\Omega + 2\pi\int_{\Gamma_{eu}}[\boldsymbol{t}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{h}}]^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{e}} - \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}})r\mathrm{d}\Gamma - 2\pi\int_{\Gamma_{et}}(\bar{\boldsymbol{t}}_{\mathrm{e}} - \bar{\boldsymbol{t}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} - \bar{\boldsymbol{t}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{h}})^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{h}}r\mathrm{d}\Gamma + 2\pi\int_{\Gamma_{el}}[\boldsymbol{t}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{h}}]^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{h}}r\mathrm{d}\Gamma。\tag{24}$$

式中:$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_r \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{rz}]^{\mathrm{T}}$,是应变向量。$\Gamma_{eu}$ 和 Γ_{et}

分别为单元上给定位移和表面力的边界，Γ_{el} 是单元间相邻的边界，$\Gamma_e = \Gamma_{eu} + \Gamma_{et} + \Gamma_{el}$；同时，在 Γ_{eu} 上有 $\tilde{\boldsymbol{u}}_e^h = \tilde{\boldsymbol{u}}_e - \tilde{\boldsymbol{u}}_e^p = \bar{\boldsymbol{u}}_e - \bar{\boldsymbol{u}}_e^p$。

考虑式(16)，对式(28) 第 1 项应用高斯散度定理：

$$\iint_{\Omega_e}[\boldsymbol{\varepsilon}_e^h]^T\boldsymbol{\sigma}_e^h r\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_e}[\boldsymbol{t}_e^h]^T\boldsymbol{u}_e^h r\mathrm{d}\Gamma - \iint_{\Omega_e}\boldsymbol{LDL}^T\boldsymbol{N}_e r\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_e}[\boldsymbol{t}_e^h]^T\boldsymbol{u}_e^h r\mathrm{d}\Gamma。 \tag{25}$$

可将泛函式(25) 简化为仅含边界积分的形式：

$$\prod\nolimits_{me} = -\pi\int_{\Gamma_e}[\boldsymbol{t}_e^h]^T(\boldsymbol{u}_e^h r\mathrm{d}\Gamma + 2\pi\int_{\Gamma_e}[\boldsymbol{t}_e^h]^T\tilde{\boldsymbol{u}}_e^h r\mathrm{d}\Gamma - 2\pi\int_{\Gamma_{et}}(\bar{\boldsymbol{t}}_e - \bar{\boldsymbol{t}}_e^p)^T\tilde{\boldsymbol{u}}_e^h r\mathrm{d}\Gamma。 \tag{26}$$

将式(14)、(15)、(20) 和(21) 代入式(26)，可得

$$\prod\nolimits_{me} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{c}_e^T\boldsymbol{H}_e\boldsymbol{c}_e + \boldsymbol{c}_e^T\boldsymbol{G}_e\boldsymbol{d}_e - \boldsymbol{d}_e^T\boldsymbol{P}_e。 \tag{27}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H}_e &= \pi\int_{\Gamma_e}\boldsymbol{Q}_e^T\boldsymbol{N}_e r\mathrm{d}\Gamma;\\ \boldsymbol{G}_e &= 2\pi\int_{\Gamma_e}\boldsymbol{Q}_e^T\boldsymbol{N}_e r\mathrm{d}\Gamma;\\ \boldsymbol{P}_e &= 2\pi\int_{\Gamma_{et}}\boldsymbol{N}_e^T(\bar{\boldsymbol{t}}_e - \bar{\boldsymbol{t}}_e^p)^T r\mathrm{d}\Gamma。\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

对方程(27)2 次应用驻值原理，可导得待定系数列阵和单元刚度方程：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\prod_{me}}{\partial\boldsymbol{c}_e} &= 0 \Rightarrow \boldsymbol{c}_e = \boldsymbol{H}_e^{-1}\boldsymbol{G}_e\boldsymbol{d}_e;\\ \frac{\partial\prod_{me}}{\partial\boldsymbol{d}_e} &= 0 \Rightarrow \boldsymbol{K}_e\boldsymbol{c}_e = \boldsymbol{P}_e。\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

式中：$\boldsymbol{K}_e = \boldsymbol{G}_e^T\boldsymbol{H}_e^{-1}\boldsymbol{G}_e$ 为单元刚度矩阵；$\boldsymbol{P}_e$ 是等效节点载荷列阵。

2.3 刚体运动项的恢复

将上述单元刚度方程组装成总体刚度方程后，采用乘大数法引入位移边界条件即可求得所有节点的齐次解。进一步地，与获得的特解叠加便可求得节点处的位移全解。但需要指出的是，单元域内任一点处的位移还需恢复刚体位移项，具体原因和恢复方法参见文献[9][301]，这里因篇幅所限不再复述。

3 数值算例

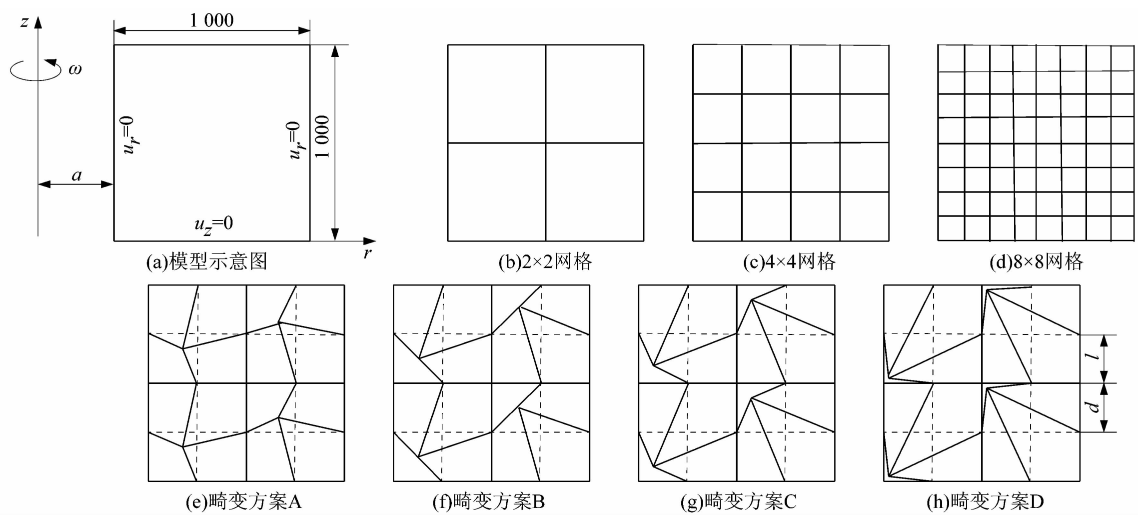
3.1 弹性土自重下的沉降

在第 1 个例子中，将弹性土体视为内径为 a，外径为 $a+1$，高为 1 m 的轴对称体，边界条件及网格划分如图 3 所示，上表面为自由边界条件。图中还给出了 A，B，C，D 共 4 种在 4 × 4 网格下的畸变方案，畸变程度用 d/l 表示，其取值依次为 $d/l = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$。取弹性模量 $E = 1$ Pa，泊松比 $v = 0.3$。此外，在使用杂交基本解有限元法求解齐次解时，域外源点的位置与网格单元的大小有关，在子午面内源点不得配置在 z 轴左侧，以免产生奇异性。在本例中，为方便起见，这里将 a 设置为 3 m。表 1 列出了几种规则网格杂交基本解有限元的计算结果。由表 1 可以看出：在 $z = 1$ m 处的轴向位移 u_z 以及在 $z = 0$ 处的轴向应力 σ_r 和径向应力 σ_z 值分别与解析解结果和传统有限元计算结果(ABAQUS)对比，表现出较好的一致性。

表 2 给出了 4 种不同程度畸变网格下对应的计算误差：

$$\varepsilon = \frac{\Psi_D - \Psi_U}{\Psi_U} \times 100\%。 \tag{30}$$

式中：Ψ_D 和 Ψ_U 分别为畸变网格和规则网格下的计算结果。



(a)模型示意图 (b)2×2网格 (c)4×4网格 (d)8×8网格

(e)畸变方案A (f)畸变方案B (g)畸变方案C (h)畸变方案D

图 3 弹性土轴对称模型及其不同网格划分

Figure 3 Axisymmetric model of elastic soil and different mesh configurations

表1　弹性土轴对称模型自重下的解

Table 1　Results for self-weight inaxisymmetric model of elastic soil

	解析解	ABAQUS解	杂交基本解有限元		
		4×4网格	2×2网格	4×4网格	8×8网格
$u_z(z=1)$	−0.371 0	−0.371 0	−0.371 00	−0.371 00	−0.371 00
$\sigma_z(z=0)$	−1.000 0	−1.000 0	−1.000 02	−0.999 95	−0.999 97
$\sigma_r(z=0)$	−0.429 0	−0.428 6	−0.428 61	−0.428 61	−0.429 03

表2　所选点处总位移的相对误差

Table 2　Relative errors for total displacement at selected points

坐标		总位移相对误差 $\varepsilon(u)$/%			
r/m	z/m	$d/l=0.3$	$d/l=0.5$	$d/l=0.7$	$d/l=0.9$
3.25	0.25	0.000	0.000	0.043	0.031
3.75	0.25	0.000	0.006	−0.043	0.019
3.25	0.75	0.005	−0.001	0.076	0.033
3.75	0.75	0.005	0.005	−0.073	0.132

如图3所示，在B，C，D的3种网格下，可以看出有些单元退化成了三角形或凹四边形，传统有限元法已无能为力。但从表3～4中的数据可知，网格畸变情况下HFS-FEM仍具有较高精度。

表3　所选点处径向应力的相对误差

Table 3　Relative errors for radial stressat selected points

坐标		径向应力相对误差 $\varepsilon(\sigma_r)$/%			
r/m	z/m	$d/l=0.3$	$d/l=0.5$	$d/l=0.7$	$d/l=0.9$
3.25	0.25	−0.025	−0.012	0.035	0.165
3.75	0.25	−0.009	−0.049	0.013	0.044
3.25	0.75	−0.032	−0.096	0.613	0.548
3.75	0.75	−0.031	0.180	0.184	0.352

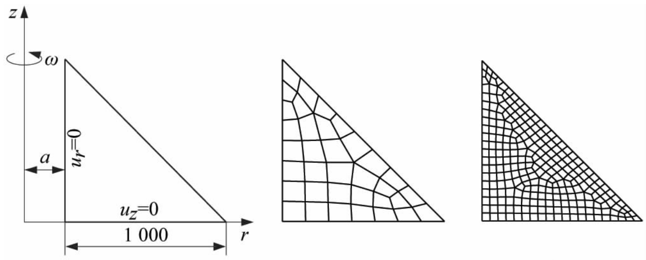
表4　所选点处轴向应力的相对误差

Table 4　Relative errors for axial stressat selected points

坐标		轴向应力相对误差 $\varepsilon(\sigma_z)$/%			
r/m	z/m	$d/l=0.3$	$d/l=0.5$	$d/l=0.7$	$d/l=0.9$
3.25	0.25	−0.001	−0.009	−0.107	−0.017
3.75	0.25	0.003	0.001	−0.120	0.147
3.25	0.75	−0.036	−0.032	−0.700	−0.032
3.75	0.75	0.024	0.000	−1.016	−0.080

3.2　离心力作用下的空心圆锥

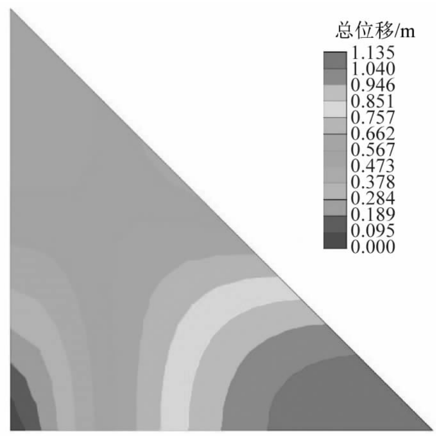
图4所示为离心载荷作用下的空心圆锥体，在底面和内表面分别施加法向位移约束，曲面为自由边界条件。在本例中，取 $a=3$ m 为内径，弹性模量取 $E=1$ Pa，泊松比 $\nu=0.3$，$\rho=1$ kg/m^3，$\omega=1$ rad/s。图5和图6所示为35单元网格下总位移和应力分量云图。由图5和6可以看出，HFS-FEM与ABAQUS二者所得位移和径向应力结果吻合良好。图7(a)和(b)所示为35单元网格下HFS-FEM和ABAQUS的轴向应力云图；图7(c)所示为251单元下的ABAQUS轴向应力云图。结果显示HFS-FEM在稀疏网格下(35单元)仍然具有良好精度，而在251单元网格下ABAQUS轴向应力云图才与HFS-FEM相当。此外，HFS-FEM还表现出较高的收敛速度。



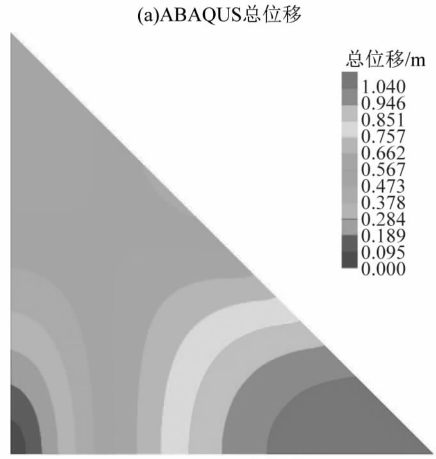
(a)模型示意图　(b)35单元网格　(c)251单元网格

图4　空心圆锥模型及其网格划分

Figure 4　Model of hollow cone and its mesh configurations



(a)ABAQUS总位移



(b)HFS-FEM总位移

图5　总位移云图

Figure 5　Contour plots of total displacement

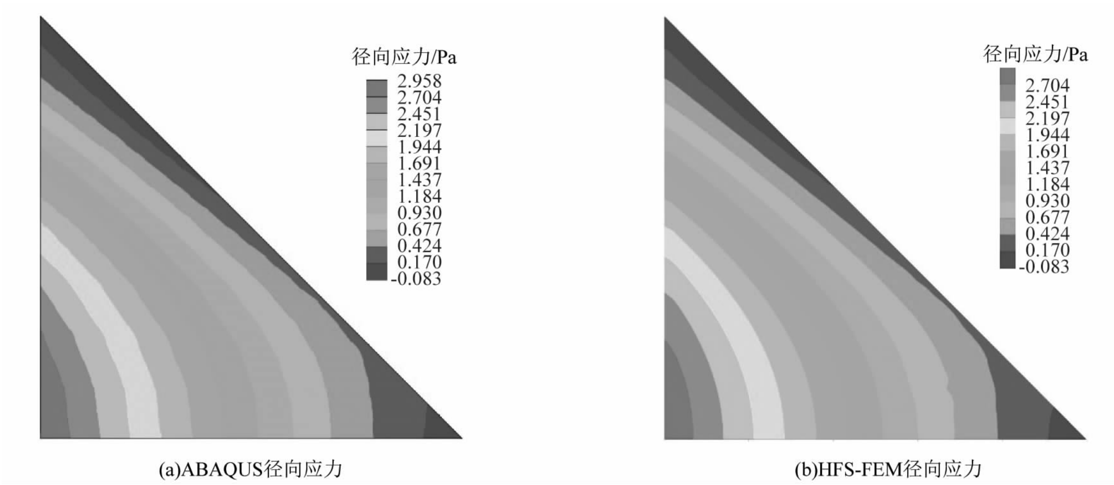


图 6　径向应力云图

Figure 6　Contour plots of radial stress

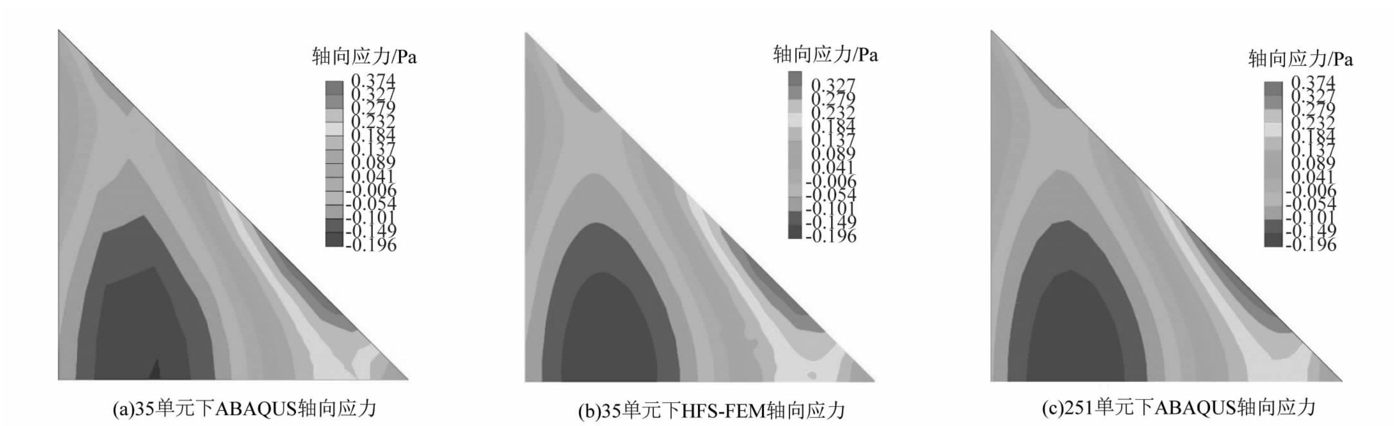


图 7　轴向应力云图

Figure 7　Contour plots of axial stress

3.3　离心力作用下的任意边界回转体

如图 8 所示为离心力作用下花生状回转体,曲面为自然边界条件,内表面固定。弹性模量 $E = 1$ Pa,泊松比 $\nu = 0.3$,$\rho = 1$ kg/m^3,$\omega = 1$ rad/s,内径 $a = 3$ m。其中 $r_1 = 1.0$ m,$r_2 = 0.8$ m。图 9 和 10 给出了 31 单元网格下总位移和应力分量云图。由图 9 和 10 可以看出,HFS-FEM 与 ABAQUS 二者所得位移和应力结果吻合良好。由图 10 可以看出在应力分布上部分地方还有些不同,这与网格疏密程度有关,并随着网格的加密二者会趋于一致的精确解。

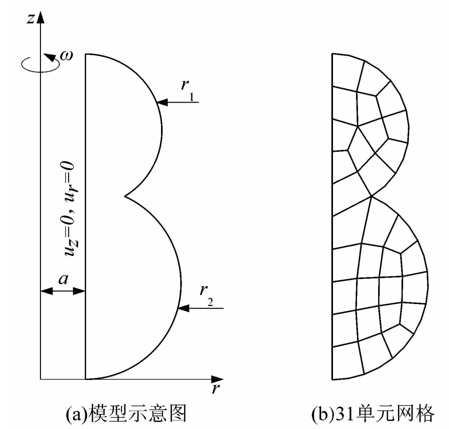


图 8　“花生”模型及其网格划分

Figure 8　Model of “Peanut” and its mesh configurations

4　结语

对于含体力的轴对称弹性力学问题,课题组利用其非齐次控制方程得到任意一组位移和应力特解,并将此特解与杂交基本解有限元列式结合而获得齐次解,最后,通过线性叠加原理求得全解。此模型求解过

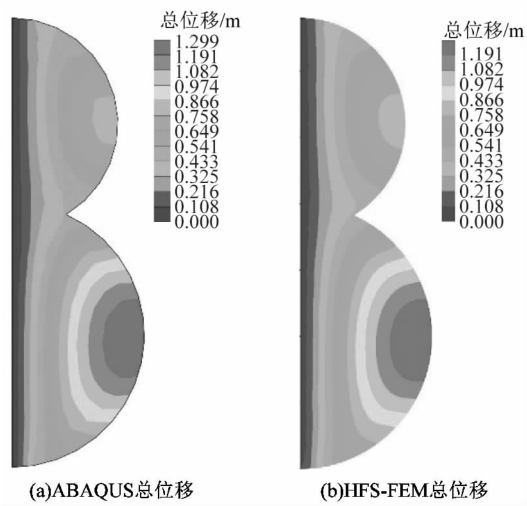


图9　总位移云图

Figure 9　Contour plots of total displacement

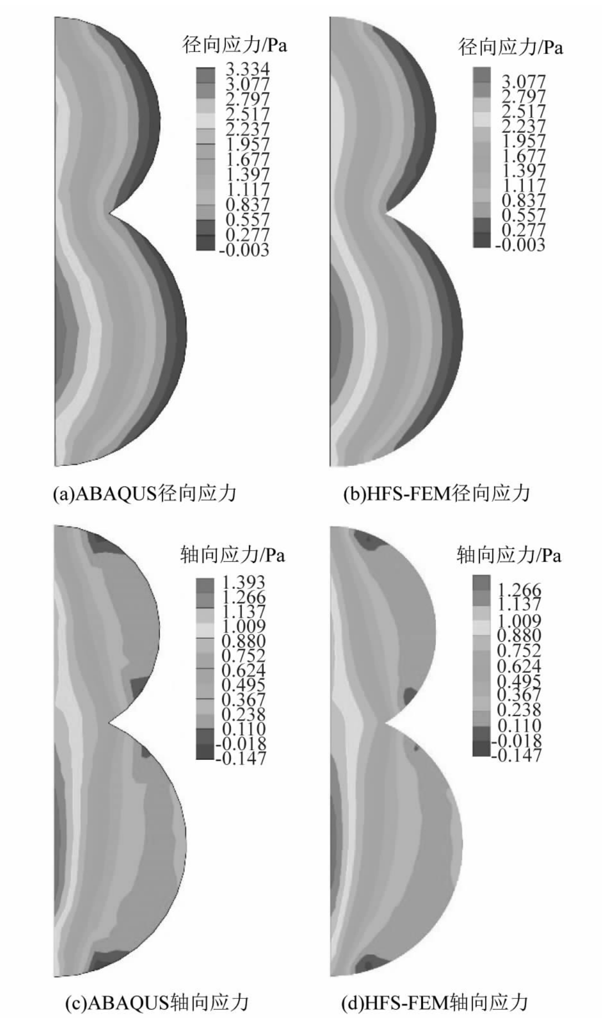


图10　径向和轴向应力云图

Figure 10　Contour plots of radial stress and axial stress

程理论清晰,易于数值实现,且由特解法消除因体力项而产生的区域积分后,杂交基本解有限元的网格畸变免疫性、稀疏网格也能达到理想精度等优点得以保持。此外,需要指出的是当求解模型为实心回转体时,该杂交基本解有限元法将不能处理。但随着基本解的发展,这一问题会得到解决。同时,针对体力项为任意体力且难以获得相应解析特解时,可利用适当的径向基函数近似处理特解并得到其封闭形式。

参考文献:

[1] JIROUSEK J,LEON N. A powerful finite element for plate bending[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,1977,12(1):77-96.

[2] WANG Keyong,LI Peichao,ZHANG Minliang. Trefftz finite element method for orthotropic potential problems[J]. Chinese Quarterly of Mechanics,2012,33(3):499-506.

[3] DHANASEKAR M,HAN Jianjun,QIN Qinghua. A hybrid-Trefftz element containing an elliptic hole[J]. Finite Elements in Analysis and Design,2006,42(14/15):1314-1323.

[4] QIN Qinghua,WANG Keyong. Application of hybrid-Trefftz finite element method to frictional contact problems[J]. Computer Assisted Mechanics & Engineering Sciences,2008,15(3/4):319-336.

[5] WANG Keyong,QIN Qinghua,KANG Yilan,et al. A direct constraint-Trefftz FEM for analysing elastic contact problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering,2005,63(12):1694-1718.

[6] WANG Hui,QIN Qinghua,XIAO Yi. Special n-sided voronoi fiber/matrix elements for clustering thermal effect in natural-hemp-fiber-filled cement composites[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer,2016,92:228-235.

[7] WANG Keyong,ZHANG Liqiang,LI Peichao. A four-node hybrid-Trefftz annular element for analysis of axisymmetric potential problems[J]. Finite Elements in Analysis and Design,2012,60:49-56.

[8] ZHOU Junchen,WANG Keyong,LI Peichao,et al. Hybrid fundamental solution based finite element method for axisymmetric potential problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements,2018,91:82-91.

[9] ZHOU Junchen,WANG Keyong,LI Peichao,et al. A hybrid fundamental-solution-based 8-node element for axisymmetric elasticity problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements,2019,101:297-309.

[10] NARDINI D,BREBBIA C A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements[J]. Applied Mathematical Modelling,1983,7(3):157-162.

[11] AHMAD S,BANERJEE P K. Free vibration analysis by BEM using particular integrals[J]. Journal of Engineering Mechanics,1986,112(7):682-695.

[12] QIN Qinghua,WANG Hui. MATLAB and C programming for trefftz finite element methods[M]. Boca Raton:CRC Press,2008:258-266.

(下转第17页)