[研究・设计]

DOI:10.3969/j.issn.1005-2895.2021.04.004

基于 UDF 二次开发黏弹性流体数值研究

赫¹,王企鲲^{1,2}*,薛壮壮¹ 邹

(1. 上海理工大学 能源与动力工程学院,上海 200093: 2. 上海理工大学 上海市动力工程多相流动与传热重点实验室, 上海 200093)

摘 要:针对目前工业上对黏弹性流体数值模拟计算存在计算复杂、收敛状况较差等缺点,课题组基于商业软件 FLUENT 中二次开发模块 UDF,提出了一种基于 FLUENT 软件核心求解器数值计算黏弹性流体流场的程序编制方法。 该编程思路及方法具有普适性,可被推广至具有不同本构关系的黏弹性流体的数值计算。课题组通过多个实例验证了 该编程方法的可行性及所编制程序的可靠性,同时提出了"定常问题的非定常化计算"的数值计算方法以提高黏弹性流 场数值计算的稳定性与收敛性。结果表明:使用此种方法不仅具有计算方便、可靠等优点,且可以实现不同种类黏弹性 流体模型的数值模拟研究。选用合适的时间步长、定常问题非定常算法可以有效加快收敛速度,增强收敛的稳定性。 键 词:黏弹性流体;UDF 二次开发;FLUENT 软件;定常问题非定常化计算 关 中图分类号:0359 文献标志码:A 文章编号:1005-2895(2021)04-0014-06

Numerical Research on Secondary Development of Viscoelastic Fluid Based on UDF

ZOU He¹, WANG Qikun^{1,2*}, XUE Zhuangzhuang¹

(1. School of Energy and Power Engineering, University of Shanghai for Science and Technology; Shanghai 200093, China;

2. Shanghai Key Laboratory of Multiphase Flow and Heat Transfer in Power Engineering,

University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: In view of the shortcomings of current industrial numerical simulation calculations for viscoelastic fluids such as complex calculations and poor convergence, a programming method for numerical calculation of viscoelastic fluids based on the FLUENT software core solver was proposed on the basis of the secondary development module UDF in the commercial software FLUENT. The proposed programming idea and methods were universal and can be extended to the numerical calculation of viscoelastic fluids with different constitutive relations. The feasibility of the programming method and the reliability of the program through multiple examples were verified, and a numerical calculation method of " unsteady iteration of steady problems" was proposed to improve the stability and convergence of the numerical calculation of the viscoelastic flow field. The results show that this method not only has the advantages of convenient and reliable calculation, but also can realize the numerical simulation research of different types of viscoelastic fluid models. The selection of appropriate time step and the unsteady iteration for steady problems can effectively accelerate the convergence speed and enhance the stability of convergence.

Keywords: viscoelastic fluid; UDF module; FLUENT; unsteady iteration for steady problems

依据非牛顿流体是否具有弹性,可将其划分为纯 黏性流体与黏弹性流体^[1-2]。黏弹性流体特征:同时具 合物溶液^[5]等。大量研究表明黏弹性流体具有许多

有黏性和弹性2种性质,如血液^[3]、唾液^[4]和 PVP 聚

收稿日期:2020-12-22:修回日期:2021-05-25

基金项目:国家教育部博士点基金(20113120120003);国家教育部博士点基金(20130073110059)。

第一作者简介:邹赫(1997),男,河南南阳人,硕士研究生,主要研究方向为微流体机械流动。通信作者:王企鲲(1978),男,浙 江嘉兴人,工学博士,副教授,主要研究领域为叶轮机械流体动力学、低 Re 数黏性流体力学、生物流体力学等。E-mail;zh19121 @ 163. com

不同于牛顿流体特殊物理现象^[6-10],如:湍流减阻效 应、剪切稀变效应、挤出胀大效应、Weissenberg 效应和 Kaye 效应,在工程实际中具有广泛的应用前景^[11-12]。

目前国内外学者对黏弹性流体的研究主要集中于 理论与实验2方面。然而,描述黏弹性流体的数学模 型十分复杂,理论研究仅限于简单流动,结果不具有普 适性;实验研究结果直观,但很难获得流场中的重要内 特性参数,如流场变形率、弹性应力等;因而限制了对 黏弹性流体流动机理的深入研究。

随着计算机技术的迅速发展,数值模拟被广泛应 用于黏弹性流体流动机理的研究。相较于牛顿流体, 黏弹性流体本构方程因其形式复杂且非线性强,因此, 对其开展数值研究的难度远高于牛顿流体。上述问 题,引起众多学者的关注,并相继展开研究:Alves 等^[13]和 Hulsen等^[14]分别应用有限体积法和有限元法 对黏弹性流体圆柱绕流问题进行数值研究,指出此类 方法无法在局部区域获得收敛,表明需采用更为先进 的数值计算方法或更高的网格精细度;Xiong等^[15]通 过直接数值模拟(Direct Numerical Simulation,DNS)计 算固定翼型(NACA0012)在黏弹性流体中的流动状 态,指出由于黏弹性流体本构方程的双曲特性会导致 计算量和计算所需时间增大。

上述方法均需要编写专门的程序代码,针对性较强,且计算复杂性及难度相对较高,严重限制数值模拟 在弹性流体研究领域中的推广应用。目前 FLUENT 自 带的二次开发模块 UDF 对黏弹性流动进行数值模拟 的研究对编程方法原理的论述较少、缺乏可靠性验证, 在数值计算稳定性与收敛性方面的缺陷并没有提出相 应的有效解决方案^[16]。

因此,课题组从原理性角度出发,提出新型黏弹性 流体数值模拟方法。将 FLUENT 核心求解器中牛顿流 体动量方程缺少的弹性应力项以源项形式编写进 UDF 程序并载入 FLUENT,实现对黏弹性流动的数值 模拟。为验证该方法的可靠性,基于 Oldroyd-B 本构 模型的驱动方腔流与 FENE-P 本构模型的圆柱绕流 2 个实例作为验证,并提出将流场计算中非定常问题定 常化。

1 黏弹性流体控制方程

黏弹性流体其基本方程主要由连续性方程、动量 方程及本构方程组成:

连续方程:

$$\partial u_i / \partial x_i = 0_{\circ} \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu_s \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}^p}{\partial x_i^{\circ}} \quad (2)$$

式中: x_i 代表x,y,z3个方向的坐标分量, $i = 1,2,3;u_i$ 分别代表x,y,z3个方向的流速, $i = 1,2,3;\rho$ 为流体密度;p为压强; μ_s 为溶剂的黏性系数; τ_{ij}^{ν} 为弹性应力张量,由黏弹性流体的本构方程所确定。

对于均匀的高聚物溶液所形成的黏弹性流体,其 本构方程可统一写为^[17]:

$$\tau_{ij}^{p} = \frac{\mu_{p}}{\lambda} [f(r) C_{ij} - \delta_{ij}]; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial C_{ij}}{\partial x_k} = C_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + C_{kj} - \frac{1}{\lambda} \left[\delta_{jk} + \alpha (C_{ik} - \delta_{ik}) \right] \left[f(r) C_{kj} - \delta_{kj} \right]_{\circ}$$
(4)

式中: μ_p 为聚合物溶液中溶质的动力黏度; λ 为黏弹性 流体的松弛时间; C_i 称为黏弹性流体变形率张量;f(r)为 Perterlin 函数; α 为已知参数。

根据 *f*(*r*) 和 α 的不同取值, 形成黏弹性流体本构 方程^[18], 如表 1 所示。

表1 黏弹性流体模型分类

Table 1 Classification of viscoelastic fluid models

黏弹性流体模型	参数及函数取值
Oldroyd-B 模型	a = 0, f(r) = 1
Giesekus 模型	$a \neq 0, f(r) = 1$
FENE-P 模型	$a = 0, f(r) = (L^2 - 3) / (L^2 - C_{kk})$

式(4)是具有双曲特性的方程,在对高魏森贝格数的黏弹性流动的数值计算中,会因存在高魏森贝格问题(high Wissenberg number problem,HWNP)^[19]而导致数值收敛性差。通常可在式(4)等式右边添加 $\kappa \frac{\partial}{\partial x_k} (\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_k}),$ 人工黏性耗散项来改善数值计算的稳定性。其中 κ 是人工黏性系数。

2 基于 UDF 二次开发黏弹性流体数值模拟方法 2.1 UDF 代码编译

对比黏弹性流体与不可压牛顿流体的运动方程, 仅本构方程不同。黏弹性流体的动量方程比牛顿流体 多一项 $\partial \tau_{ij}^{p}/\partial x_{j}$ 。因此,利用 FLUENT 中自带的二次开 发的模块 UDF,将 FLUENT 核心求解器中牛顿流体动 量方程所缺少的项 $\partial \tau_{ij}^{p}/\partial x_{j}$,以源项的形式通过 UDF 程 序补充进核心求解器,并利用该软件自带的用户自定 义标量方程的功能,编写相应的 UDF 程序代码,将黏 弹性流体本构方程载入到 FLUENT 软件中与核心流场 求解器进行耦合求解,这样便可实现对黏弹性流体的 数值计算。 为便于描述,课题组以基于 Oldroyd-B 本构模型的黏弹性流体为例,来论述 UDF 程序的具体实施过程。该方法具有普适性,可被推广至具有其它本构关系的黏弹性流体。

根据式(1)~(4),令其中 α =0,f(r)=1,并在式(4)等号右侧加入能起到稳定计算作用的人工黏性项,便可得到基于 Oldroyd-B 本构模型的黏弹性流体运动控制方程:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu_s \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\mu_p}{\lambda} \frac{\partial C_{ij}}{\partial x_j};$$
(5)

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k C_{ij})}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\kappa \frac{\partial C_{ij}}{\partial x_k} \right) + C_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + C_{kj} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\lambda} (C_{ij} - \delta_{ij})_{\circ}$$
(6)

对于动量方程式(5),在 FLUENT 软件中所计算 的牛顿流体动量方程的基本形式为:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu_s \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_{i\circ} \qquad (7)$$

式中F_i为方程的源项。

对于牛顿流体而言,利用源项可额外定义流体的 各种体积力(如重力、惯性力等)。将式(7)与式(5) 对比,令

$$F_{i} = \frac{\mu_{p}}{\lambda} \frac{\partial C_{ij}}{\partial x_{i}}$$
(8)

如此便可将黏弹性流体中弹性应力项以源项形式 添加入 FLUENT 软件核心求解器所使用的动量方程之 中,这是随后 UDF 代码的编写的基础。对于黏弹性流 体本构方程式(6),需要将其转化为 FLUENT 软件中 标准的用户自定义标量输运方程形式后,才能为软件 自动求解。

在 FLUENT 软件的 UDF 编程系统中,式(9)为用 户自定义标量输运方程的一般形式,该式从左边到右 边分别为非定常项(瞬态项)、对流项、耗散项和源项:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j\phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(z \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \right) + S_{\phi\circ}$$
(9)

式中 φ 代表用户自定义标量(或通用变量)。

为迎合式(7)的基本形式,将式(6)2边同乘以流 体密度 ρ ,即得:

$$\frac{\partial \rho C_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_k C_{ij})}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \kappa \frac{\partial C_{ij}}{\partial x_k} \right) + \rho C_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \rho C_{kj} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\rho}{\lambda} (C_{ij} - \delta_{ij})_{\circ}$$
(10)

将式(9)与 Oldroyd-B 本构模型式(10) 的各项对 比,令:

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{C}_{ij}; \quad (11)$$

$$e = \rho \kappa; \qquad (12)$$

$$S_{\phi} = \rho C_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \rho C_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\rho}{\lambda} (C_{ij} - \delta_{ij})_{\circ} \qquad (13)$$

这样便将黏弹性流体 Oldroyd-B 模型本构方程转 化为 FLUENT 软件标准用户自定义标量输运方程的形 式,以便于随后的 UDF 代码的编制。

对于式(11)中求解变量 C_{ij} ,可直接用 FLUENT 软 件中自带的自定义标量数组函数 C_UDSI(c,t,0:2)来 定义。以二维问题为例, C_{ij} 具有 3 个独立变量: C_{xx} , C_{yy} , C_{xy} ,可依次对应于标量数组函数 C_UDSI 以下分 量:C_UDSI(c,t,0),C_UDSI(c,t,1),C_UDSI(c,t, 2)。对于式(12)中的耗散系数 c,可作为物性参数,直 接在 FLUENT 的材料面板中输入,无需编写 UDF 程序。

计算的流程如图 1 所示,在计算开始之前,需要对 用户通过 FLUENT 输入的值或默认值使用 UDF 定义 边界条件,对所计算的区域以及用户自定义标量场进 行初始化。再进行循环计算,同时求解动量方程(5)。 通过连续性方程(1)对速度进行更新,最后计算本构 方程(6)。在完成一次计算后,对收敛性进行判断,直 到收敛为止,完成计算。



图1 数值计算流程图

Figure 1 Flow chart of numerical solution

2.1 可靠性验证

2.1.1 验证算例 **I** ——Oldroyd 本构模型的驱动方 腔流

为了验证本研究所编写的 UDF 代码的正确性,课题组以文献[20]和文献[16]中黏弹性流体顶盖驱动 方腔流动进行同参数的数值模拟对比。经网格无关性 验证后网格分布及边界条件设置如图 2 所示。方腔的 高度 *H* = 10 mm,长高比为1:1。方腔内部充满着一种 黏弹性流体,方腔顶板以恒定速度 U 沿 x 轴正向移动,其余 3 个壁面均保持静止。





选用二维 Oldroyd-B 模型作为黏弹性流体的本构 模型,壁面采用无滑移条件。计算采用双精度,压力与 速度的耦合采用"SIMPLEC"算法,采用标准格式离散 压力方程,动量方程和用户自定义标量方程通过采用 "QUICK"格式来离散,校验工况雷诺数为 *Re* 为 15,120 和 333,魏森贝格数 *Wi* = 0.05,溶剂黏性比 β = 0.3。

计算结果如图 3 所示。本研究计算结果与文献中 结果十分吻合。

2.2.2 验证算例II——FENE-P本构模型的圆柱绕流

利用类似地方法,课题组编制了基于 FENE-P 模型的黏弹性流动计算程序,并与文献[21]中的黏弹性流体圆柱绕流结果相对比,以验证程序的正确性。文献[16]中,圆柱绕流的雷诺数 *Re* 为 100,威森贝格数 *Wi* 为 0 ~ 10,分子最大拉伸无量纲长度 *L* 为 10 和 100,聚合物溶液的溶剂黏性比β 为 0.9。

易知,利用本研究所编写的 UDF 代码,计算圆柱 平均阻力系数 $\overline{C_p}$ 与文献[21]中的结果偏差率均在 3% 以下,这证明本研究计算代码的可靠性。

3 黏弹性流体数值计算方法研究

课题组选用三维黏弹性流体球形颗粒的力学特性 作为示例算例,进一步说明本研究所提出黏弹性流体 数值计算程序是可靠的。

3.1 模型简介

研究的对象为悬浮于液相中的单个刚性球状颗粒,利用相对运动模型进行建模,其模型和边界条件如图 5(a)所示。



图 3 计算数据对比



由于来流为黏弹性流体,经网格无关性验证,表明 有关黏弹性流体流动的数值研究对网格的精度要求相 比于牛顿流体更高。因此,课题组采用 10⁶的计算网 格数量来进行数值模拟,其网格示意图如图 5(b)所 示,流体为基于 FENE-P 本构模型的黏弹性流体。

3.2 定常问题非定常化算法

本研究计算的工况为为较低 Re 的层流、定常流 场,在商用 FLUENT 软件中,往往会选择稳态方法进行 流场计算,控制方程式(5)和(6)中,不再含有对时间





图5 三维模型示意图

Figure 3 3D model diagram

的偏导项,控制方程形式得到了简化,整个计算量也相 应大幅下降。然而实际计算经验表明:利用一般的稳 态算法计算这一类黏弹性流动问题,数值收敛性较差, 并且需要在计算过程中根据实际的计算敛散性情况, 不断地调节亚松弛因子,计算才可能达到收敛。因此, 若要达到较高计算精度,总的迭代次数是非常多的,需 要很长的计算时间。

课题组的计算实践表明采用"定常问题的非定常 化"方法可以有效地解决上述问题。所谓"定常问题 的非定常化"方法,是指即使是定常流动问题,仍按照 非定常的方程,按时间推进的方法进行计算,只是在每 个物理时间步上仅作极少量次数的内迭代。这种处理 方法使每个时间步上所获得的数值解并非是收敛的物 理解,只有在计算物理时间步数足够多时,最终的计算 结果才收敛至定常流动的物理解。

图 6 所示为基于上述验证算例 I 和 II 所需迭代步数,FLUENT 中残差的精度标准均设置为 10⁻⁰⁹, Δt 为 步长,而其数值计算至收敛的时间相比于稳态计算至 少缩短一半。



图6 总迭代次数对比图

Figure 6 Comparison chart of total iterations 此种方法对于三维算例同样适用。但是由于时间 步长的取值对于数值计算的迭代次数有着极大的影 响,若时间步长取得太小,会大大增加计算周期;若时 间步长取得太大,又会引起计算发散,从而无法得到收 敛解。因此,同网格无关性的原理一样,选择一个对计 算结果影响较小而又可以满足稳定性要求的合适时间 步长也是非常有必要的。

表 2 中 d = 2, Re = 10, Wi = 1 时为本研究三维数值 计算的时间步长验证结果。不难发现:当数值计算可 以正常收敛时,采用不同的时间步长并不影响最终的 数值结果。随着分子最大拉伸长度 L 的增大,其合适 时间步长会越小;随着溶剂黏性比β的降低,其合适时 间步长也会减小。综合计算效率和成本,时间步长 0.000 20 s 被应用于本研究中。在一些较难收敛的工 况下,时间步长0.000 01 s 也被使用。 表2 计算结果

Table 2 Calculation results										
	$\beta = 0.7$			$\beta = 0.9$						
步长/s	阻力系数 C _D		升力系数 C _L		阻力系数 C _D		升力系数 C _L			
	L = 50	L = 200	<i>L</i> = 50	<i>L</i> = 200	<i>L</i> = 10	<i>L</i> = 50	<i>L</i> = 10	<i>L</i> = 50		
0.000 01	4.161 0	4.250 6	0.066 3	0.071 0	4.234 8	4.250 0	0.071 5	0.071 2		
0.000 05	-	4.2507	-	0.071 0	4.234 8	4.250 2	0.071 5	0.071 2		
0.000 20	-	-	-	-	4.234 8	-	0.071 5	-		
0.001 00	_	_	-	-	-	-	-	-		

4 结语

课题组提出了一种新型基于 FLUENT 中二次开发 模块 UDF 的黏弹性流体数值模拟方法,以 Oldroyd-B 模型的二维方腔驱动流和 FENE-P 模型的二维圆柱绕 流验证方法的可靠性,并以三维黏弹性流体 FENE-P 模型的圆球的力学特性为例,提出加速和稳定收敛的 方案。结论如下:

1) 课题组所提出的新型计算方法所编译的黏弹 性流体代码描述其流场的内特性参数与现有相关文献 研究结果吻合度较好,具有较高的准确性。

2) 对于较低雷诺数定常情况下的黏弹性流体流 场计算,可采用定常问题非定常化的处理方案选用合适 的时间步长,可有效加快收敛速度,并节省计算成本。 参考文献:

- [1] LUXY, LIUC, HUGQ, et al. Particle manipulations in non-Newtonian microfluidics: A review [J]. Journal of Colloid and Interface Science, 2017, 500:182.
- [2] 李凤臣, 宇波, 魏进家, 等. 表面活性剂湍流减阻 [M]. 北京: 高等 教育出版社,2012.
- [3] GUPTA S, WANG W S, VANAPALLI S A. Microfluidic viscometers for shear rheology of complex fluids and biofluids [J]. Biomicrofluidics, 2016, 10(4):043402.
- [4] CAMPO-DEANO L, DULLENS R P A, AARTS D G A L, et al. Viscoelasticity of blood and viscoelastic blood analogues for use in polydymethylsiloxane in vitro models of the circulatory system [J]. Biomicrofluidics, 2013, 7(3): 34102.
- [5] BRUST M, SCHAEFER C, DOERR R, et al. Rheology of human blood plasma; viscoelastic versus Newtonian behavior [J]. Physical Review Letters, 2013, 110(7):078305.
- [6] TOMS B A. Some observations on the flow of linear polymer solutions through straight tubes at large reynolds numbers [C]. Proceedings of 1st International Congress on Rheology. Amsterdam: Springer, 1948: 135 - 138.
- [7] LODGE A S. Elastic liquids [M]. New York : Academic Press, 1964 : 477 - 478.
- [8] UEBLER E A. Pipe entrance flow of elastic liquids [D]. Newark: University of Delaware, 1966:96-101.
- [9] METZNER A B, UEBLER E A, FONG C F. Converging flows of

viscoelastic materials [J]. AIChE Journal, 1969, 15(5):750-758.

- [10] KAYE A. A bouncing liquid stream [J]. Nature, 1963, 197(4871): 1001 - 1002
- [11] GARNER F H, NISSAN A H. Rheological properties of highviscosity solutions of lung molecules [J]. Nature, 1946, 158 (4018):634.
- [12] JEGATHEESWARAN S, EIN-MOZAFFARI F, WU J N. Laminar mixing of non-Newtonian fluids in static mixers: Process intensification perspective [J]. Reviews in Chemical Engineering, 2020,36(3):423-436.
- [13] ALVES M A, PINHO F T, OLIVEIRA P J. The flow of viscoelastic fluids past a cylinder: finite-volume high-resolution methods [J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2001, 97 (2): 207 -232.
- [14] HULSEN M A, FATTAL R, KUPFERMAN R. Flow of viscoelastic fluids past a cylinder at high Weissenberg number: Stabilized simulations using matrix logarithms [J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2005, 127(1):27-39.
- XIONG Y L, PENG S, YANG D, et al. Influence of polymer additive [15] on flow past a hydrofoil: a numerical study [J]. Physics of Fluids, 2018,30(1):013104.
- [16] 郑智颖. FLUENT 在粘弹性流体流动数值模拟中的应用 [D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2013:25-49.
- [17] 蔡伟华,李凤臣,张红娜,等. 黏弹性流体动力学[M]. 北京:科 学出版社,2016:69-73.
- [18] VAITHIANATHAN T, ROBERT A, BRASSEUR J G, et al. An improved algorithm for simulating three-dimensional, viscoelastic turbulence [J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2006, 140:3 - 22.
- [19] SURESHKUMAR R, BERIS A N. Effect of artificial stress diffusivity on the stability of numerical calculations and the flow dynamics of time-dependent viscoelastic flows [J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 1995, 60(1):53 - 80.
- [20] YAPICI K, KARASOZEN B, ULUDAG Y. Finite volume simulation of viscoelastic laminar flow in a lid-driven cavity [J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2009, 164(1/2/3):51-65.
- RICHTER D, IACCARINO G, SHAQFEH E S G. Simulations of [21] three-dimensional viscoelastic flows past a circular cylinder at moderate Reynolds numbers[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2010, 651(3):415-442.