

[研究·设计]

DOI:10.3969/j.issn.1005-2895.2021.06.003

# 折叠式柔性关节设计及运动学建模

杜静恩, 许勇\*, 贾云博, 刘佳莉, 赖磊捷, 徐蕊

(上海工程技术大学 机械与汽车工程学院, 上海 201620)

**摘要:**针对串联柔性连续体在实际应用时不能很好地适应作业环境所需的末端位姿的问题,课题组提出了折叠式柔性复合关节:利用三浦折痕原理设计了折叠式扭转关节;改进水弹折痕设计了折叠式摆转关节;将折叠式扭转关节与摆转关节按一定顺序串联得到折叠式柔性复合关节。用几何方法得到了各个单元和折叠式柔性复合关节的运动学模型。软件仿真结果验证了所提出的模型的正确性。课题组的设计增强了串联连续体对作业环境的适应性。

**关键词:**折叠式柔性复合关节;三浦折痕原理;改进水弹折痕;折叠式扭转关节;摆转关节;绳驱动

中图分类号:TH112 文献标志码:A 文章编号:1005-2895(2021)06-0012-11

## Design and Kinematics Modeling of Folding Flexible Joint

DU Jing'en, XU Yong\*, JIA Yunbo, LIU Jiali, LAI Leijie, XU Rui

(School of Mechanical and Automotive Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai, 201620, China)

**Abstract:** In order to solve the problem that the serial flexible continuum could not adapt to the desired end-position in the practical application, a folding flexible composite joint was proposed. The folding torsion joint was designed by using Miura crease principle. The folding swing joint was designed by improving the hydroelastic crease. The final flexible composite joint was obtained by series of the folding torsion joint and the pendulum-rotation joint in a certain order. The kinematics models of each element and the folding flexible composite joint were obtained by geometric method. The software simulation results verify the correctness of the proposed model. The design enhances the adaptability of the serial continuum to the operating environment.

**Keywords:** folding flexible composite joint; Miura crease principle; improving hydroelastic crease; folding torsion joint; pendulum-rotation joint; line drive

折纸是一门起源于中国的古老民间手工艺,6世纪时传入日本<sup>[1]</sup>。20世纪初, Yoshizawa 提出了折纸符号系统,大大促进了折纸艺术的发展<sup>[2]</sup>。折纸和剪纸可以将平面材料变成可拉伸、可折展和具有多重稳定性的三维关节机构<sup>[3]</sup>。这些由于材料的折叠产生的特性被用于航天器材<sup>[4]</sup>、建筑制造<sup>[5]</sup>、电子能源<sup>[6]</sup>、化学传感<sup>[7]</sup>和生物医学<sup>[8]</sup>等领域。

近年来,越来越多学者尝试着将折纸原理应用到了机器人的构型的开发设计中,保留折纸的空间可折展等特性并结合工业机器人自动作业的优势,使得折纸机器人对作业环境有更好的适应性。折纸机器人是指通过对自身形态的折叠变形来实现对应功能的自动化

机器<sup>[9]</sup>,即通过对材料的折痕设计使其在折叠后具有特定的三维形态,进而实现相应功能<sup>[10]</sup>。这类机器人往往对材料性能有一定的要求,用于制造折纸机器人的纸张或其他可折叠薄片材料在显著减少机器人重量和降低材料成本的同时也有利于环境保护<sup>[11]</sup>。

我们可以通过折纸技术来实现对机构的柔性设计,将现代平面制造技术如光蚀刻、激光切割和3D打印等与折叠式设计方法相结合的方案无疑是一种非常高效且实际的选择。折叠技术可以根据需要定制折叠方式完成特定的任务,高效快捷,其重构性又大大降低了成本。

课题组基于折纸机构的柔顺性和可折展性,设计

收稿日期:2021-07-01;修回日期:2021-09-10

基金项目:上海市自然科学基金(21ZR1426000)。

第一作者简介:杜静恩(1998),男,硕士研究生,主要研究方向为机器人机构学。通信作者:许勇(1974),男,江苏南通人,博士,副教授,硕士研究生导师,主要研究方向为机器人机构学。E-mail:brucexuyong@163.com

出可以实现局部扭转和摆转的折叠式柔性复合关节,建立了折叠式柔性复合关节的运动学模型,并对折叠式柔性复合关节的驱动空间、关节空间和操作空间之间的映射关系进行了分析。

## 1 折叠式柔性复合关节

### 1.1 折叠式柔性复合关节组成

课题组提出的折叠式柔性复合关节包含的基本关节为折叠式扭转关节和折叠式摆转关节,二者组合而成的折叠式柔性复合关节如图1所示。

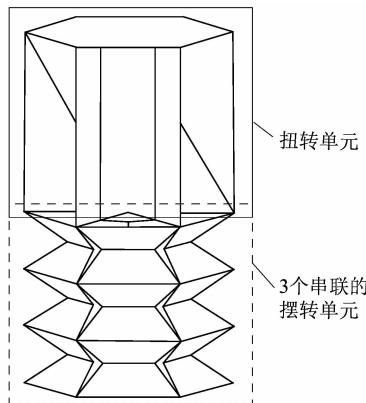


图1 折叠式柔性复合关节

Figure 1 Folding flexible composite joint

#### 1.1.1 折叠式柔性扭转关节

图2(a)所示为折叠式扭转关节展开后的折痕,其中粗实线为关节的边界或山折痕,粗虚线为谷折痕,折叠后就成了图2(b)所示的带有扭转功能的三维模型。

图2(b)中  $O_1$  和  $O_2$  分别为动、定平台形心,动定平台发生绕  $O_1O_2$  轴的相对扭转。

#### 1) 支撑平台及挡板

图2(a)中分离出上、下支撑平台与挡板如图3所示。图形  $ABCDEF$  为正六边形且边长为  $2l_0$ ,  $\triangle ABG_1$ ,  $\triangle AFG_2$ ,  $\triangle FEG_3$ ,  $\triangle EDG_4$ ,  $\triangle DCG_5$ ,  $\triangle CBG_6$  皆为等边

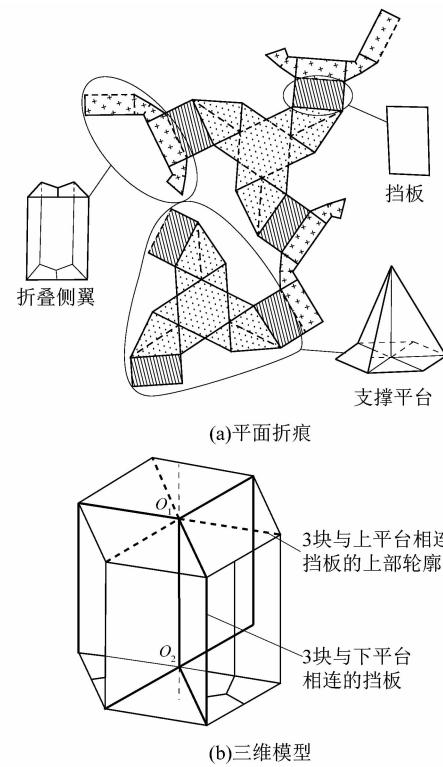


图2 折叠式扭转关节展开与折叠效果图

Figure 2 Renderings of expansion and folding of folding torsion joint

三角形;  $\triangle AG_1H_1$ ,  $\triangle AG_2H_1$ ,  $\triangle EG_3H_2$ ,  $\triangle EG_4H_2$ ,  $\triangle CG_5H_3$ ,  $\triangle CG_6H_3$  都是直角三角形, 斜边分别为  $AH_1$ ,  $AH_1$ ,  $EH_2$ ,  $EH_2$ ,  $CH_3$ ,  $CH_3$ ; 边  $G_1H_1$ ,  $G_3H_2$ ,  $G_5H_3$  连接挡板。挡板都是矩形且短边  $J_1G_1$ ,  $J_2G_3$ ,  $J_3G_5$  长都是  $2l_0$ ,  $O_1H_i$  为动、定平台间的竖直距离  $H = 2\sqrt{3}l_0$  (由折痕间的简单几何关系确定)。

按峰谷折痕分别折叠, 折叠时点  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$  重合于正六边形  $ABCDEF$  的形心  $O_1$  处, 点  $H_1, H_2, H_3$  在最后重合于点  $H_i$  处。

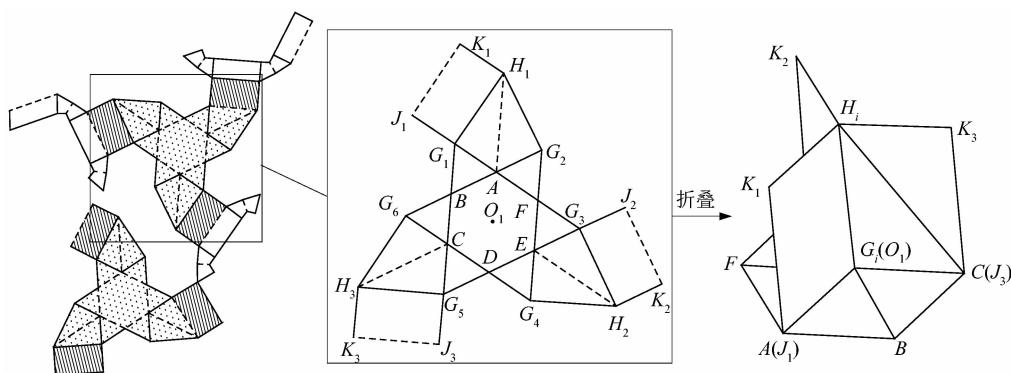


图3 单个支撑平台与挡板折叠展示

Figure 3 Single support platform and baffle folding display

支撑平台分上下2个,上下平台的折痕与折叠方法基本一致,2平台连接的3个挡板分别连接3个折叠侧翼的两侧使之成为一个整体。

## 2) 折叠侧翼

折叠侧翼为图4中的阴影部分,将其单独拆开做展示。折叠侧翼的竖直侧板 $A_1B_1C_1D_1$ 和 $A_2B_2C_2D_2$ 为矩形;称 $A_2B_2F_2E_2$ , $A_1B_1F_2E_2$ , $C_1D_1E_1F_1$ 和 $C_2D_2E_1F_1$ 为折叠板。对图形 $D_1C_1F_1C_2D_2E_1$ : $C_1D_1$ 的延长线与 $C_2D_2$ 的延长线交于点 $O_1$ , $\triangle C_1O_1C_2$ 为边长为 $2l_0$ 的等边三角形; $E_1D_1$ , $E_1D_2$ , $E_1F_1$ 分别垂直平分 $O_1C_1$ , $O_1C_2$ , $C_1C_2$ 。折叠时将 $A_1$ , $A_3$ 重合, $B_1$ , $B_2$ 重合形成结构闭环。

为计算驱动绳长度,引入参数:面 $A_2B_2F_2E_2$ 与面 $A_2B_2C_2D_2$ 的夹角 $\angle E_2A_2D_2 = \theta_1$ ;面 $A_2B_2F_2E_2$ 与面 $A_1B_1F_2E_2$ 的夹角 $\angle B_2F_2B_1 = \theta_2$ ;面 $A_2B_2C_2D_2$ 与面 $A_1B_1C_1D_1$ 始终在竖直平面内,设两个面的二面角为扭转角 $\varphi$ ,则有: $\angle A_1O_2A_2 = \varphi$ 。

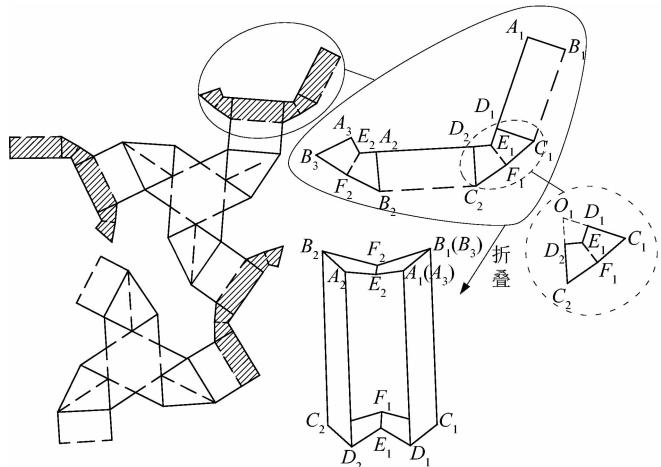


图4 折叠侧翼折痕及三维效果

Figure 4 Folded flank creases and 3D effect

折叠侧翼折叠过程中,按峰谷折痕折叠,从图5中俯视图和三维图可以看到随着 $\varphi$ 值的变化折叠侧翼的变化情况。

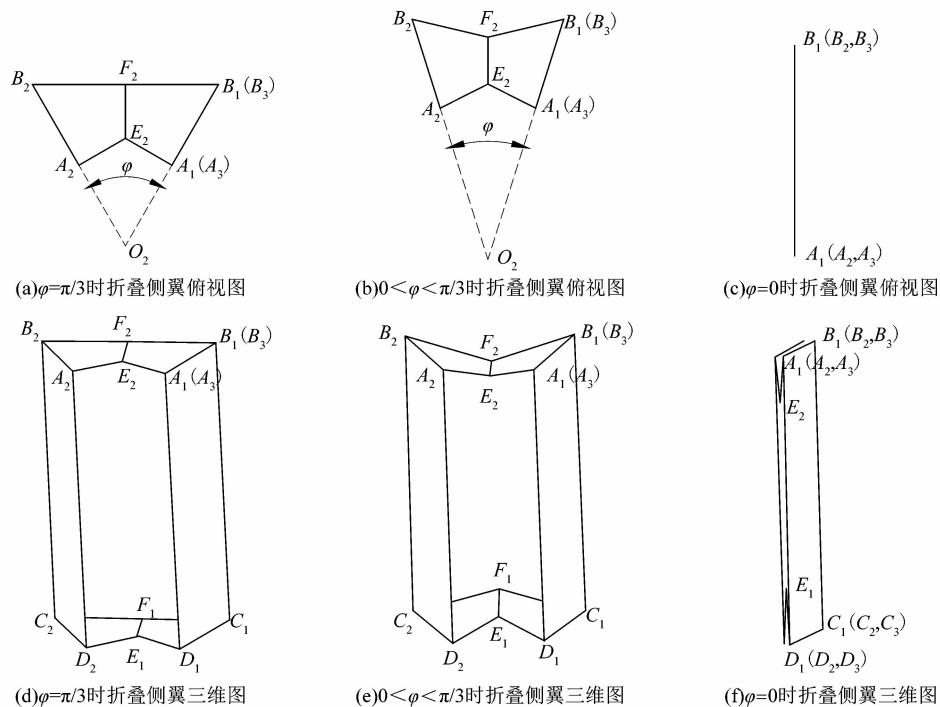


图5 折叠侧翼变形展示

Figure 5 Folded flank deformation display

扭转关节在驱动绳放松状态时,由于折叠侧翼2个竖直板绑有弹力绳,折叠侧翼合拢;驱动绳受外部拉力后,折叠侧翼的2个竖直板被撑开,从而使上下支撑平台发生相对扭转。

图6所示为折叠扭转关节的4个状态。状态I,

$\varphi = 0$ 时,折叠侧翼完全折叠;状态II, $0 < \varphi \leq \pi/6$ 和状态III, $\pi/6 < \varphi < \pi/3$ ,这2种状态的区别在于驱动空间到关节空间的驱动绳长计算方式不同,但对于关节空间到操作空间计算完全相同;状态IV, $\varphi = \pi/3$ 为折叠式扭转关节的最大扭转角,折叠侧翼呈完全展开状态。

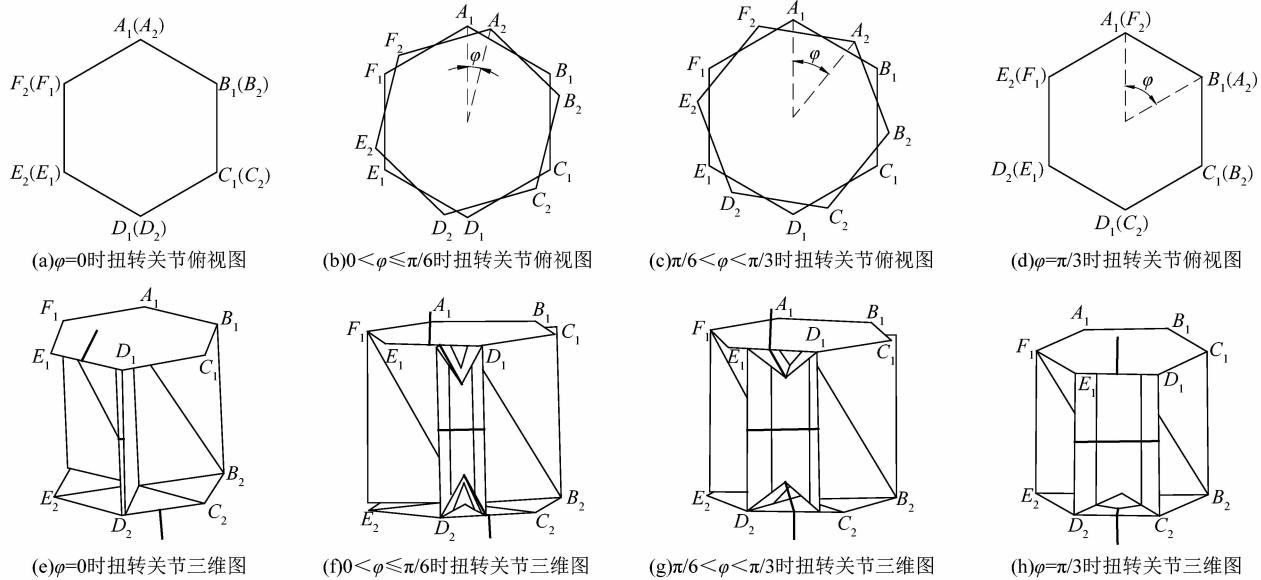


图 6 折叠式扭转关节运动状态

Figure 6 Rotation process of folding torsion joint

### 1.1.2 折叠式柔性摆转关节设计

图 7(a)所示为折叠式摆转关节完全展开后的折痕,图 7(b)所示为折叠后具有摆转功能的三维模型。

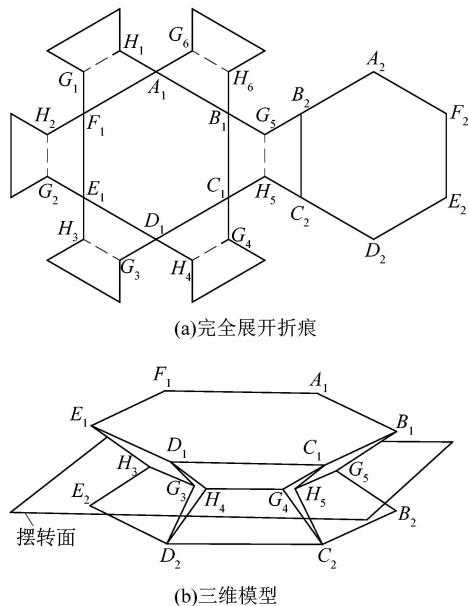


图 7 折叠式摆转关节

Figure 7 Folding swing joint

图 7(b)中的摆转面指折叠式摆转关节变形时摆转面两侧关于摆转面是镜像的,且  $H_iG_i$  痕在摆转面上。其中,  $i=1,2,\dots,6$ 。

上下底面  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  与  $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$  都是边长为  $2l_0$  的正六边形。 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  各边与各个  $H_iG_i$

折痕都构成等腰梯形,且折痕  $H_iG_i$  的长度都为  $l_0$ 。为方便描述,下文将图形  $A_1B_1H_6B_2A_2G_6, B_1C_1H_5C_2B_2G_5, C_1D_1H_4D_2C_2G_4, D_1E_1H_3E_2D_2G_3, E_1F_1H_2F_2E_2G_2, F_1A_1H_1A_1F_1G_1$  称为折叠支撑板。

在不受力的情况下六边形  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  与  $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$  处于平行状态,折叠式摆转关节可以根据工作需求调整摆转角度  $\varphi$  与上下位移量  $h$ ,如图 8 所示。



图 8 折叠式摆转关节 2 种变形方式

Figure 8 Two deformation modes of folding swing joint

### 1.2 折叠式柔性复合关节设计

在设计折叠式扭转关节和摆转关节时 2 种关节的动定平台都为边长为  $2l_0$  的正六边形。先将多个折叠式摆转关节串联(课题组选取 3 个折叠式摆转关节串联),再将折叠式扭转关节的动平台串联在折叠式摆转关节串联体的定平台上,串联为折叠式柔性复合关节。

## 2 折叠式柔性复合关节运动学建模

### 2.1 折叠式柔性关节运动学建模

#### 2.1.1 折叠式扭转关节

折叠式扭转关节使用绳线来驱动,驱动绳长  $l$  与

扭转角  $\varphi$  的映射关系就是驱动空间与关节空间的映射关系;扭转角  $\varphi$  与末端平台位姿 ${}^0\mathbf{T}$ 间的映射关系就是关节空间与操作空间的映射关系。

设下支撑平台为定平台,以正六边形形心  $O_0$  为定平台坐标系原点,以定平台所在平面的向上法线方向为  $Z_0$  轴正方向,以  $O_0A_0$  方向为  $X_0$  轴正方向,最后由右手定则确定  $Y_0$  轴正方向,建立 DH 坐标系  $O_0-X_0Y_0Z_0$ ;以上支撑平台正六边形形心  $O_1$  为原点,以垂直于平面向上方向为  $Z_1$  轴正方向,以  $O_1A_1$  方向为  $X_1$  轴正方向,最后由右手定则确定  $Y_1$  轴正方向,建立 DH 坐标系  $O_1-X_1Y_1Z_1$  如图 9 所示。

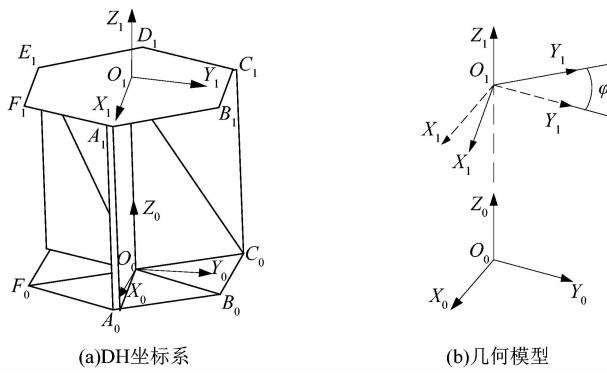


图 9 折叠式扭转关节坐标系和几何模型

Figure 9 Coordinate system and geometrical model of folding torsion joint

图 9 中的  $O_0O_1$  为动定平台发生相对扭转时的转轴,在最初时动平台与定平台坐标系夹角为 0,在发生相对扭转后动平台与定平台坐标系夹角为  $\varphi$ 。

在运动过程中上下支撑平台始终只发生相对扭转,任意时刻扭转角为  $\varphi$  时坐标系  $O_1-X_1Y_1Z_1$  相对于  $O_0-X_0Y_0Z_0$  的变换矩阵为:

$${}^0\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中  $H$  为动定平台的竖直方向的距离,且为  $H = 2\sqrt{3}l_0$ 。式(1)即为折叠式扭转关节的关节空间到操作空间的正运动学关系。

相反,扭转关节的操作空间到关节空间的关系是已知末端关节位姿,对扭转关节的扭转角  $\varphi$  进行求解。设坐标系  $O_0-X_0Y_0Z_0$  各轴上的单位矢量为  $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}$ ;动坐标系  $O_1-X_1Y_1Z_1$  原点  $O_1$  到定坐标系  $O_0-X_0Y_0Z_0$  原点  $O_0$  的位置矢量用  $\mathbf{p}$  表示。

现矢量  $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}, \mathbf{p}$  相对坐标系  $O_0-X_0Y_0Z_0$  的矩阵为

$${}^0\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

将式(1)和式(2)联立得

$$\varphi = \arccos o_y \quad (3)$$

式(3)即为扭转关节关节空间到操作空间的运动学逆解。

驱动绳的一端系在折叠侧翼(以下端为例)相邻折叠板外侧重合点  $Q$  处,穿过折叠板活动区对应的平台边的中点  $P$ ,我们将绳在  $QP$  间的长度称为驱动绳长  $l$ 。随着驱动绳长度  $l$  的变化,扭转关节的扭转角度  $\varphi$  也会发生向相应的变化。绳子在关节的整个扭转的过程中有 2 种不同的状态,具体如图 10 所示。

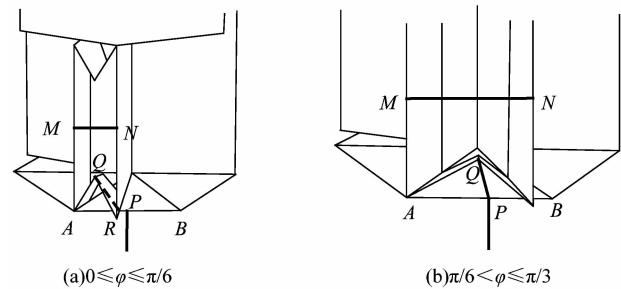


图 10 折叠式扭转关节驱动绳状态变化

Figure 10 States change of drive line of folding torsion joint

当  $0 \leq \varphi \leq \pi/6$  时,由于折叠侧翼的竖直侧板在  $AP$  段,  $l$  为  $QR, RP$  长度之和,如图 10(a)所示;当  $\pi/6 < \varphi \leq \pi/3$  时,由于折叠侧翼的竖直侧板在  $PB$  段,  $l$  等于  $PQ$  长度,如图 10(b)所示。

图 10 中的点  $M, N$  为竖直侧板外侧边线中点,2 点间拴细弹力绳用于使折叠侧翼恢复初始状态。 $R$  为折叠侧翼的竖直侧板在  $AP$  段时驱动绳与竖直侧板的接触点; $Q$  为折叠板外侧重合点。

设初始状态时绳子的原长

$$l' = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}{2} l_0 \quad (2)$$

在第 1 种状态下驱动绳长为线段  $QR + RP$ ,此时扭转角  $\varphi \in [0, \pi/6]$ ,这一段的绳长的数学模型为:

$$l = \frac{\sqrt{3}l_0 \sin(\frac{\pi}{6} - \varphi)}{\sin(\frac{5\pi}{6} + \varphi - \gamma)} + \sqrt{3l_0^2 + l_1^2 - 3l_0l_1} \quad (4)$$

其中:

$$\gamma = \arccos \frac{1 - \cos \left( \frac{\pi}{12} - \frac{\varphi}{2} \right)}{\sqrt{2 - 2 \cos \left( \frac{\pi}{12} - \frac{\varphi}{2} \right)}},$$

$$l_1 = \frac{\sqrt{3}l_0 \sin \gamma}{\sin \left( \frac{5\pi}{6} + \varphi - \gamma \right)}.$$

这里的  $\gamma$  和  $l_0$  是计算过程中为了方便计算和结果显示给出的中间变量,对最终结果没有影响。

在第 2 种状态下,此时扭转角  $\varphi \in (\pi/6, \pi/3]$ , 绳长的数学模型为:

$$l = \sqrt{\frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{6 - 6 \cos \varphi}}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \right) l_0}. \quad (5)$$

可以求得驱动绳长  $l$  与扭转角  $\varphi$  间的关系为:

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{\sqrt{3}l_0 \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right)}{\sin \left( \frac{5\pi}{6} + \varphi - \gamma \right)} + \sqrt{3l_0^2 + l_1^2 - 3l_0 l_1}, \varphi \in \left[ 0, \frac{\pi}{6} \right]; \\ l &= \sqrt{\frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{6 - 6 \cos \varphi}}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \right) l_0}, \varphi \in \left( \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)即为关节空间到驱动空间的运动学分析。

由于式(6)的 2 个等式都只有 1 个自变量  $\varphi$  与 1 个因变量  $l$ , 用式(6)求得的逆解就是驱动空间到关节空间的运动学分析。

### 2.1.2 折叠式摆转关节

折叠式摆转关节没有刚性扭转和移动, 使用绳线驱动来使动平台发生位姿变换。折叠式摆转关节的关节空间参数包括: 单个摆转关节的动平台发生摆转时与定平台形成的二面角为摆转角  $\alpha$ ; 单个摆转关节动平台发生摆转时(即摆转角  $\alpha$  存在时)垂直于动定 2 个平台交线的面与定平台  $X$  轴的夹角为方位角  $\beta$ ; 单个摆转关节动平台仅发生上下平移但不发生摆转时(即摆转角  $\alpha$  不存在的时候), 动平台在进行沿  $Z$  轴的移动时与动平台初始位置的距离为伸缩位移  $h$ 。

以正六边形的形心  $O_i$ (定平台  $i=1$ , 动平台  $i=2$ ) 为坐标系的原点, 以  $Q_i A_i$  方向为  $X_i$  轴正方向; 以正六边形所在面法线的向上方向为  $Z_i$  轴正方向, 用右手定则确定  $Y_i$  轴正方向建立如图 11 所示坐标系。

$A_1, C_1, E_1$  为驱动绳穿过定平台孔径的中心, 在第  $i$  个摆转关节定平台建立坐标系  $O_i-X_iY_iZ_i$  ( $i=1, 2, 3$ ,

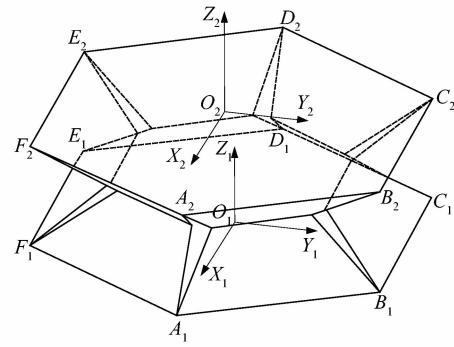


图 11 单个折叠式摆转关节坐标系

Figure 11 Coordinate system of single folding swing joint

$\dots, n$ ); 动平台建立动坐标系  $O_{i+1}-X_{i+1}Y_{i+1}Z_{i+1}$ 。直接相连的串联体的接触面的动定坐标系重合, 故可以认为第  $i$  个关节的动坐标系与第  $i+1$  个关节的定坐标系是同一个坐标系。当摆转关节在竖直状态时摆转角  $\alpha_i$ , 方位角  $\beta_i$  和伸缩位移  $h_i$  均为 0。

以摆转关节在竖直位置时为初始位置, 3 条绳的长度  $L_{A_i}, L_{C_i}, L_{E_i}$  均等于中央支撑弹簧长度  $L$ , 即  $L_{A_i} = L_{C_i} = L_{E_i} = L$ 。当摆转关节上下收缩时(即动平台相对于定平台仅在竖直方向进行平移), 每根驱动绳长度变化量为  $\Delta L_{A_i} = \Delta L_{C_i} = \Delta L_{E_i} = h_i$ , 如图 12(a) 所示。

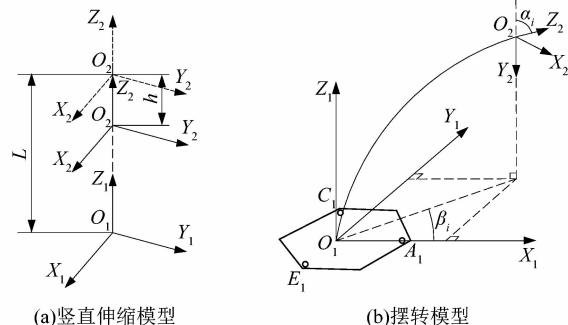


图 12 单个折叠式摆转关节几何模型

Figure 12 Geometrical model of single folding swing joint

当摆转关节因绳驱发生弯曲时, 将整个运动过程分解为: 从定坐标系  $O_i$  到动坐标系  $O_{i+1}$  之间的平移和以定坐标系  $Y_i, Z_i$  轴为旋转轴的旋转。当关节受绳驱动发生摆转后摆转角为  $\alpha_i$ , 方位角为  $\beta_i$  时, 此时动平台坐标系相对于定平台坐标系位置和姿态都发生了相应的变化, 3 个方向上的绳长也发生变化, 摆转关节靠 3 个方向上的驱动绳长度变化实现摆转和上下收缩。

定平台的坐标系与动平台的坐标系间的关系用 DH 法推导并得到变换矩阵  $T$ , 完成摆转关节从关节空

间至操作空间的运动学分析。这种整体的变换可以分解为多个变换实现:从定坐标系中心点  $O_i$  平移至动坐标系中心  $O_{i+1}$ , 绕  $Z_i$  轴扭转  $\beta_i$ , 绕  $Y_i$  轴扭转  $\alpha_i$ , 绕  $Z_i$

$${}_{i+1}^i \mathbf{T} = \text{Trans} (x, y, z) \text{Rot} (Z, \beta_i) \text{Rot} (Y, \alpha_i) \text{Rot} (Z, -\beta_i)。$$

计算得:

$${}_{i+1}^i \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta_i \cos \alpha_i + \sin^2 \beta_i & \cos \beta_i \sin \beta_i \cos \alpha_i - \cos \beta_i \sin \beta_i & \cos \beta_i \sin \alpha_i & (L/\alpha_i) \cos \beta_i (1 - \cos \alpha_i) \\ \cos \beta_i \sin \beta_i \cos \alpha_i - \cos \beta_i \sin \beta_i & \sin^2 \beta_i \cos \alpha_i + \cos^2 \beta_i & \sin \beta_i \sin \alpha_i & (L/\alpha_i) \sin \beta_i (1 - \cos \alpha_i) \\ -\cos \beta_i \sin \alpha_i & -\sin \beta_i \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & (L/\alpha_i) \sin \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。 \quad (7)$$

式中: $L$  表示摆转关节在初始位置的时候驱动绳的长度; $\alpha_i$  取值范围为  $[0, \pi/3]$ ; $\beta_i$  取值范围为  $[0, 2\pi]$ 。

由于串联摆转关节是由多个摆转关节串联而成的,故由  $n$  个摆转关节串联而成的串联摆转关节中,从第 1 个摆转关节的定坐标系到第  $n$  个关节的动坐标系的齐次变换矩阵为:

$${}_{n+1}^1 \mathbf{T} = \prod_{i=1}^n {}_{i+1}^i \mathbf{T}。 \quad (8)$$

式(8)表示了串联摆转关节的关节空间与操作空间的映射关系,即关节空间到操作空间的运动学关系。

相反串联摆转关节的操作空间到关节空间的关系是已知末端关节位姿,对串联摆转关节各个关节的摆转角  $\alpha$  和方位角  $\beta$  进行求解。设坐标系  $O_i-X_iY_iZ_i$  各轴上的单位矢量为  $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}$ ;动坐标系  $O_{i+1}$  到定坐标系原点  $O_i$  的位置矢量用  $\mathbf{p}$  表示。

以 3 个摆转关节串联为例,现已知第 3 个摆转关节动平台  $O_4$  相对于第 1 个摆转关节定平台  $O_1$  的位姿,则矢量  $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}, \mathbf{p}$  对应坐标系  $O_1-X_1Y_1Z_1$  的矩阵为

$${}_{i+1}^1 \mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。 \quad (9)$$

联立式(8)和式(9)可以求得:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i = \arccos \mathbf{a}_{zi+1}^i; \\ \beta_i = \arctan \left( \frac{\mathbf{p}_{yi+1}^i}{\mathbf{p}_{xi+1}^i} \right) \end{array} \right\} \quad (10)$$

式中: $\mathbf{a}_{zi+1}^i$  为  $Z_{i+1}$  轴上的单位矢量; $\mathbf{p}_{xi+1}^i$  和  $\mathbf{p}_{yi+1}^i$  为动坐标系原点  $O_{i+1}$  到定坐标系  $O_1$  之间的位置矢量。

式(10)即为操作空间到关节空间的运动学分析关系式。

在摆转关节运动过程中,当摆转角  $\alpha_i$  和方位角  $\beta_i$

轴扭转  $-\beta_i$  得到齐次变换矩阵。联立平移矩阵和扭转矩阵,得到  $O_i$  坐标系到  $O_{i+1}$  坐标系的齐次变换矩阵  $\mathbf{T}$  为

$${}_{i+1}^i \mathbf{T} = \text{Trans} (x, y, z) \text{Rot} (Z, \beta_i) \text{Rot} (Y, \alpha_i) \text{Rot} (Z, -\beta_i)。$$

确定后,则动定平台间的 3 根绳长度  $L_{A_i}, L_{C_i}$  和  $L_{E_i}$  可以分别确定。当摆转关节弯曲到任意位姿时,过动定平台与绳的交点  $A_i, C_i$  和  $E_i$  作  $O_iP$  线的垂线,垂足分别为  $A_{i0}, C_{i0}$  和  $E_{i0}$ ,  $L_0$  为动定平台间弹簧的中心轴线,如图 13 所示。

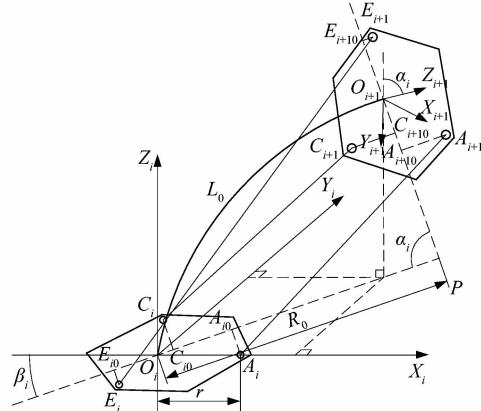


图 13 单个折叠式摆转关节弯曲任意角度模型

Figure 13 Flexed mode at any angle of single folding swing joint

可得出  $A_iA_{i0} \parallel A_{i+1}A_{i+10}$ ,  $C_iC_{i0} \parallel C_{i+1}C_{i+10}$ ,  $E_iE_{i0} \parallel E_{i+1}E_{i+10}$  且  $A_iA_{i0} = A_{i+1}A_{i+10}$ ,  $C_iC_{i0} = C_{i+1}C_{i+10}$ ,  $E_iE_{i0} = E_{i+1}E_{i+10}$ 。

设  $O_iP = O_{i+1}P = R_0$ ,  $A_iO_i = C_iO_i = E_iO_i = r$ , 结合上述的长度和位置关系可解得:

$$\left. \begin{array}{l} L_0 = R_0 \cdot \alpha_i; \\ L_{A_i} = (R_0 - r_1) \cdot \alpha_i; \\ L_{C_i} = (R_0 - r_2) \cdot \alpha_i; \\ L_{E_i} = (R_0 - r_3) \cdot \alpha_i; \\ r_1 = A_{i0}O = r \cdot \cos \beta_i; \\ r_2 = C_{i0}O = r \cdot \cos ((4\pi/3) - \beta_i); \\ r_3 = E_{i0}O = r \cdot \cos ((2\pi/3) - \beta_i) \end{array} \right\} \quad (11)$$

由式(11)可以推导出摆转角  $\alpha_i$  和方位角  $\beta_i$  与 3 根绳长度的变化量  $\Delta L_{A_i}, \Delta L_{C_i}, \Delta L_{E_i}$  之间的关系为:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta L_{A_i} = r \cdot \alpha_i \cdot \cos \beta_i; \\ \Delta L_{C_i} = r \cdot \alpha_i \cdot \cos ((4\pi/3) - \beta_i); \\ \Delta L_{E_i} = r \cdot \alpha_i \cdot \cos ((2\pi/3) - \beta_i). \end{array} \right\} \quad (12)$$

式(12)即为单个摆转关节的关节空间到驱动空间的运动学关系式。根据式(12)可以解得单个摆转关节的关节空间与驱动空间的映射关系为:

$$\left. \begin{array}{l} \beta_i = \arctan \frac{\Delta L_{B_i}}{\Delta L_{A_i}}; \\ \alpha_i = \frac{\Delta L_{A_i}}{r \cdot \cos \beta_i}. \end{array} \right\} \quad (13)$$

式(13)即为摆转关节单关节的驱动空间到关节空间的运动学关系。

### 2.1.3 串联摆转关节的运动学建模

分析摆转关节串联体的驱动空间与关节空间的映射关系时,使用 3 根绳子驱动整个串联摆转关节,当驱动所在的地方发生弯曲行为时必然会影响末端关节驱动线的长度,需考虑关节与关节间的耦合影响。摆转关节  $i$  发生弯曲时,关节  $i+1$  会随着关节  $i$  的摆转角  $\alpha_i$  和方位角  $\beta_i$  的变化而变化。此时各个驱动线的变化量可分别表示为:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta L_{A_i} = r \cdot \alpha_i \cdot \cos \left( \beta_i + (i-1) \cdot \frac{\pi}{6} \right); \\ \Delta L_{C_i} = r \cdot \alpha_i \cdot \cos \left( \beta_i + (i+3) \cdot \frac{\pi}{6} \right); \\ \Delta L_{E_i} = r \cdot \alpha_i \cdot \cos \left( \beta_i + (i+7) \cdot \frac{\pi}{6} \right). \end{array} \right\} \quad (14)$$

对各模块进行解耦合,解耦合后串联摆转体驱动绳长度变化量为:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta L_{A_n} = \sum_{i=1}^n r \cdot \alpha_i \cdot \cos \left( \beta_i + (i-1) \cdot \frac{\pi}{6} \right); \\ \Delta L_{C_n} = \sum_{i=1}^n r \cdot \alpha_i \cdot \cos \left( \beta_i + (i+3) \cdot \frac{\pi}{6} \right); \\ \Delta L_{E_n} = \sum_{i=1}^n r \cdot \alpha_i \cdot \cos \left( \beta_i + (i+7) \cdot \frac{\pi}{6} \right). \end{array} \right\} \quad (15)$$

式中  $n$  为串联的摆转关节的数量。

式(15)就是摆转关节串联体的关节空间到驱动空间的运动学分析。

### 2.2 折叠式柔性复合关节运动学建模

结合式(1)和式(8)可以得到  $O_0-X_0Y_0Z_0$  坐标系到  $O_{n+1}-X_{n+1}Y_{n+1}Z_{n+1}$  坐标系的齐次变换矩阵  ${}^0_{n+1}\mathbf{T}$  为:

$${}^0_{n+1}\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_{n+1}\mathbf{T}. \quad (16)$$

式(16)即表示了折叠柔性复合关节关节空间与操作空间的正运动学关系。

设坐标系  $O_i-X_iY_iZ_i$  各轴上的单位矢量为  $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}$ ; 动坐标系  $O_{i+1}$  到定坐标系原点  $O_i$  的位置矢量用  $\mathbf{p}$  表示。

现已知第 4 个摆转关节动平台  $O_{n+1}$  相对于扭转关节定坐标系  $O_0$  的位姿,则矢量  $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}, \mathbf{p}$  对应坐标系  $O_0-X_0Y_0Z_0$  的矩阵为:

$${}^0_{n+1}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

将式(16)和式(17)联立可以求得操作空间到关节空间的逆运动学分析关系式。

由于串联后的扭转关节与摆转关节串联体的驱动是相互独立的,故折叠式柔性复合关节关节空间到驱动空间的运动学关系为:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta L_{A_n} = \sum_{i=1}^n r \cdot \alpha_i \cdot \cos \left( \beta_i + (i-1) \cdot \frac{\pi}{6} \right); \\ \Delta L_{C_n} = \sum_{i=1}^n r \cdot \alpha_i \cdot \cos \left( \beta_i + (i+3) \cdot \frac{\pi}{6} \right); \\ \Delta L_{E_n} = \sum_{i=1}^n r \cdot \alpha_i \cdot \cos \left( \beta_i + (i+7) \cdot \frac{\pi}{6} \right); \\ l = \frac{\sqrt{3}l_0 \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right)}{\sin \left( \frac{5\pi}{6} + \varphi - \gamma \right)} + \sqrt{3l_0^2 + l_1^2 - 3l_0l_1}, \varphi \in \left[ 0, \frac{\pi}{6} \right]; \\ l = \sqrt{\frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{6 - 6\cos \varphi}}{2\cos(\varphi/2)} \right) l_0}, \varphi \in \left[ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]. \end{array} \right\} \quad (18)$$

折叠式柔性复合关节的驱动空间到关节空间的运动学关系可由式(18)求得。

### 3 折叠式柔性复合关节运动仿真

通过软件对可折叠柔性复合关节进行仿真,在绳驱动的作用下,折纸关节可以做出伸缩或弯曲等动作。在仿真过程中使用的相关参数为:  $r = 20$  mm,  $l_0 = 10$  mm。在初始状态时,机构的扭转角、摆转角、方位角及驱动线的变化量都是 0,扭转角范围为  $\varphi \in [0, \pi/3]$ ,摆转角范围为  $\alpha \in [0, \pi/3]$  和方位角范围为  $\beta \in [0, 2\pi]$ 。

将扭转关节驱动绳长度公式(6)在 MATLAB 中编程,输出扭转关节驱动绳长与扭转角的变化关系如图 14 所示。

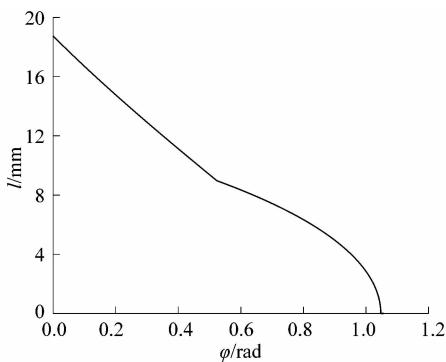


图 14 扭转关节的驱动绳长与扭转关节  
扭转角关系曲线

Figure 14 Relation curve between drive line  
length and torsion angle of torsion joint

通过控制驱动绳变化量可以控制摆转关节的动平台上动坐标系原点的运动轨迹，并实现摆转关节不同的弯曲形态。单个摆转关节摆转过程中摆转角  $\alpha \in [0, \pi/3]$ ，方位角  $\beta \in [0, 2\pi]$ ，令采样次数  $s = 180$ ，相邻采样点间  $\Delta\alpha = \pi/540$ ,  $\Delta\beta = \pi/90$ 。根据文中提出的折叠柔性复合关节运动学分析模型，在 MATLAB 中编程，得到摆转关节动坐标系运动轨迹如图 15~16 所示。图 15 所示为单个摆转关节做摆转运动时动平台上动坐标系运动轨迹曲线。图 16 所示为单个摆转体在按图 15 中的轨迹做摆转运动时 3 条驱动绳长度变化曲线。

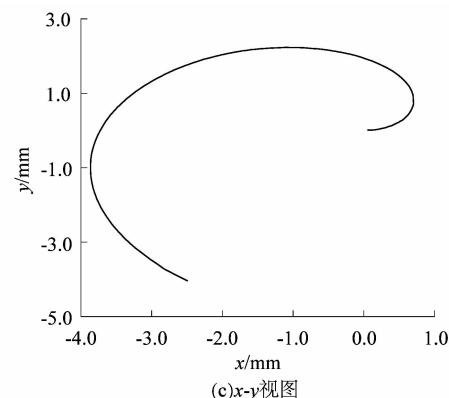
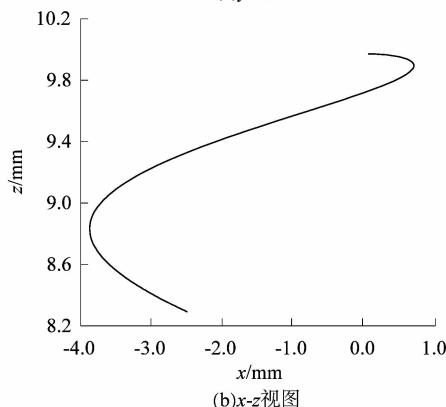
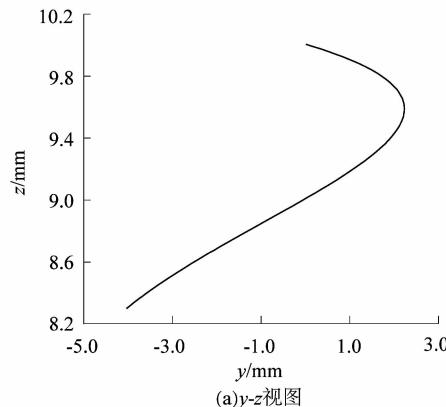


图 15 单个摆转关节动坐标系运动轨迹  
Figure 15 Motion trajectory of single swing  
joint in moving coordinate system

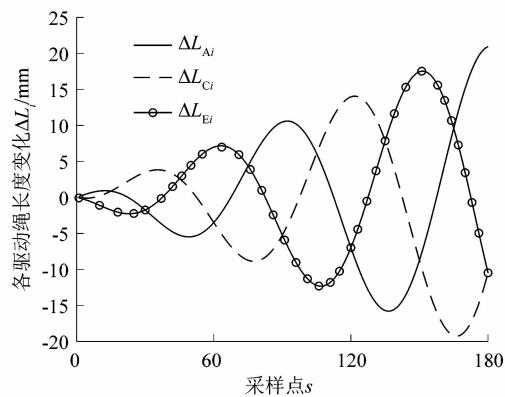
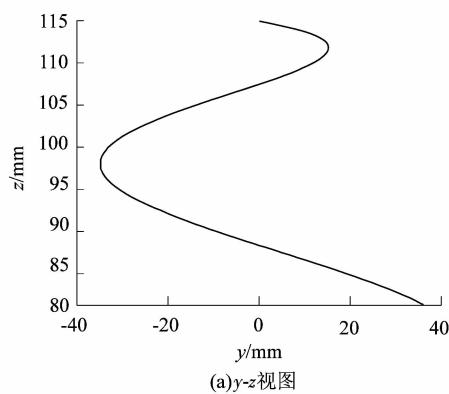


图 16 单个摆转关节摆转过程驱动绳长度变化曲线  
Figure 16 Variation curves of drive line length of  
single swing joint during swing

类似的我们也可以根据式(16)和式(18)将扭转关节与多个摆转关节串联(文中以 3 个摆转关节和 1 个扭转关节串联为例)后得到折叠式柔性复合关节的运动轨迹曲线与相应驱动绳长变化的关系,如图 17 和 18 所示。



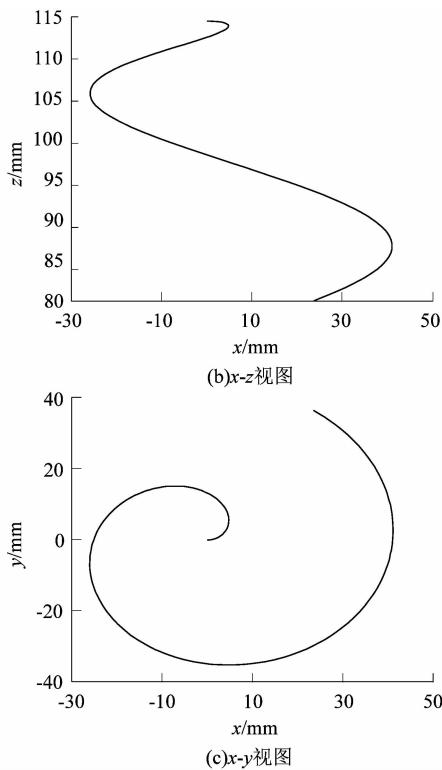


图 17 折叠式柔性复合关节末端动坐标系运动轨迹

Figure 17 Motion trajectories of end of folding flexible composite joint in moving coordinate system

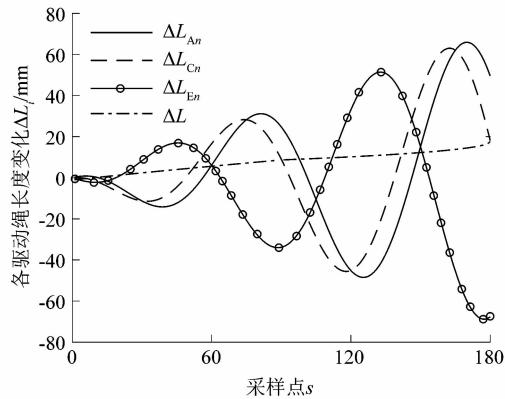


图 18 折叠式柔性复合关节转过程驱动绳长度变化曲线

Figure 18 Change curves of driving line length during rotation of folding flexible composite joint

折叠式柔性复合关节的工作空间可以利用式(16)确定折叠式柔性复合关节末端动坐标系原点  $O_4$  的空间位置分布,利用 MATLAB 绘制其工作空间如图 19 所示。

#### 4 结论

课题组利用折纸的可折展性与柔顺性,设计了多种折纸关节及多个关节串联成的折叠式柔性复合关节。主要研究成果如下:

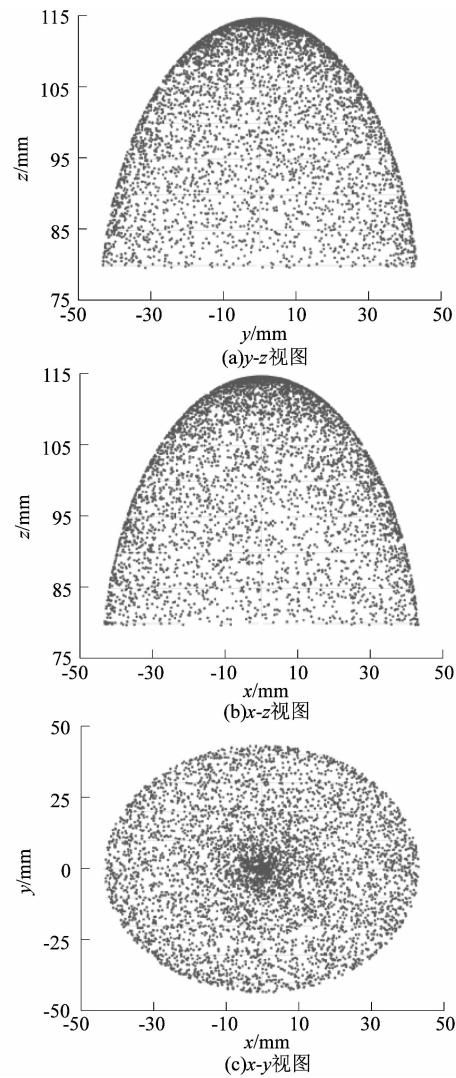


图 19 折叠式柔性复合关节的工作空间散点图

Figure 19 Workspace scatter diagram of folding flexible composite joint

1) 基于折纸原理提出了折叠式扭转关节和折叠式摆转关节的设计方案,为后续折叠关节构型的研究与实际应用提供素材。

2) 对折叠式扭转关节和折叠式摆转关节进行了运动学建模,分析了驱动空间-关节空间-操作空间的映射关系。

3) 提出折叠式柔性复合关节的设计方案并建立驱动空间-关节空间-操作空间的运动学模型。

4) 仿真验证了折叠式扭转关节、摆转关节的驱动空间-关节空间的理论数学模型的正确性;仿真并输出了折叠式柔性复合关节末端动平台坐标系原点的运动轨迹曲线及相应驱动绳长度变换关系并给出了工作空间散点图。

(下转第 29 页)