［研究·设计］

DOI:10.3969/j.issn.1005-2895.2021.06.005

基于绝对节点坐标法的超弹性材料二维梁单元动力学研究

郭嘉辉，赵春花*，独亚平，周　川，张立强

(上海工程技术大学 机械与汽车工程学院，上海　201620)

摘　要:为了探究考虑超弹性材料非线性的大变形柔性多体系统在工程实践中的应用,课题组基于绝对节点坐标法ANCF研究了针对大变形橡胶梁的高阶梁单元和超弹性材料本构模型。借助二维高阶ANCF梁单元位移模式构建了3种不可压缩超弹性橡胶梁的弹性力模型和运动微分方程:Neo-Hookean,Mooney-Rivlin和Yeoh;通过静态和动态大变形实例,和横向低阶ANCF梁单元以及ABAQUS软件仿真结果对比,结果显示:大变形橡胶梁动力学分析适合采用不可压缩超弹性本构模型Yeoh和高阶ANCF梁单元,且单元多项式位移模式、节点广义坐标类型和单元自由度数对大变形橡胶梁的计算效率影响较大。

关 键 词:超弹性本构;横向高阶梁单元;绝对节点坐标法;材料非线性

中图分类号:O313.7;TH113　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1005-2895(2021)06-0030-07

Dynamic Study of Two Dimensional Beam Element in Hyperelastic Materials Based on Absolute Nodal Coordinate Formulation

GUO Jiahui,ZHAO Chunhua*,DU Yaping,ZHOU Chuan,ZHANG Liqiang

(School of Mechanical and Automotive Engineering,Shanghai University of Engineering Science,Shanghai 201620,China)

Abstract:In order to explore the application of the flexible multi-body systems with large deformation containing the nonlinearity of hyperelastic materials in engineering practice,the high-order beam elements and hyperelastic material constitutive models were studied for large deformation rubber beamsbased on the absolute nodal coordinate formulation (ANCF). The elastic force models of Neo-Hookean,Mooney-Rivlin and Yeoh, and their motion differential equations of three incompressible hyperelastic rubber beams were established by using the displacement mode of two-dimensional high-order ANCF beam element. Through the static and dynamic large deformation examples, the simulation results were compared with transverse low-order ANCF beam element and ABAQUS software. The results show that the incompressible hyperelastic constitutive model Yeoh and high-order ANCF beam elements are suitable for the dynamic analysis of large deformation rubber beams, and the polynomial displacement mode of element, the types of generalized coordinates of element nodes and the degrees of freedom of element have a great influence on the calculation efficiency of large deformation rubber beams.

Keywords:hyperelastic constitutive;transverse high-order beam element;ANCF(absolute nodal coordinate formulation);material nonlinearity

随着科学技术的发展,橡胶等超弹性材料正逐渐应用于大变形柔性多体系统中,如轮胎、橡胶履带、橡胶输送带、软体夹持器和软体机器人等。橡胶作为一种典型的超弹性材料,其材料特性表现为变形能力大、回弹快、无迟滞性以及体积近似不可压缩等。超弹性材料具有非线性的应力与应变关系,相比传统的线弹

收稿日期:2021-06-17;**修回日期**:2021-09-16

基金项目:国家自然科学基金(51775328)。

第一作者简介:郭嘉辉(1997),男,江苏张家港人,硕士研究生,主要研究方向为柔性多体系统动力学。**通信作者**:赵春花(1982),女,江苏盐城人,博士,硕士生导师,主要研究方向为柔性多体系统动力学。E-mail:zchh226@163.com

性材料,同时会产生几何非线性和材料非线性的双重复杂特性,给大变形柔性多体系统的动力学仿真和力学特性分析提出了挑战。

Shabana 提出的绝对节点坐标法(absolute nodal coordinate formulation, ANCF)是柔性多体系统动力学建模方法之一,单元节点广义坐标定义在全局坐标系下,使得单元质量矩阵为常数阵,且单元运动微分方程组装成系统总运动微分方程时,无需进行坐标转换,为其动力学模型求解以及复杂系统动力学建模提供了极大便利[1-3]。另外,该方法用位移梯度代替传统有限单元中的有限转动,并丢弃了各种假设,因此能模拟出柔性部件的真实变形,为处理大变形、大范围运动问题提供了可能。绝对节点坐标剪切梁单元位移模式通常采用多项式作为近似函数,那么多项式位移模式的选择是决定梁单元力学特性的关键。绝对节点坐标剪切梁单元首先提出的都是横向一次剪切梁单元,这些单元[4-9]的位移模式在纵向分量上都是高次插值,在横向分量上都是线性插值,因此又称为低阶梁单元。沈振兴等[10]和赵春花等[11]分别针对三维低阶梁单元和二维低阶梁单元,理论分析了线弹性材料的泊松闭锁问题,指出其主要原因是多项式位移模式横向一次和纵向高次不满足本构方程表达的纵横向应变之间关于泊松比的线性关系,导致低阶梁单元求解结果精度低。2010 年以来,绝对节点坐标高阶梁单元即横向高次的剪切梁单元得到研究[12-16]。目前,已开发的高阶梁单元在原横向一次的基础上均只引入了横向二次多项式。因为横向二次多项式的存在,其位移模式具备了二次完全多项式,满足了本构方程表达的纵横向应变之间关于泊松比的线性关系,它们的精度被证明明显好于低阶梁单元。

目前,橡胶材料本构关系主要采用 3 种不可压缩模型: Neo-Hookean, Mooney-Rivlin 和 Yeoh。Maquedahe 等[17]、Jung 等[18]、Orzechowski 等[19-20]和 Xu 等[21-22]采用绝对节点坐标三维低阶梁单元和三维高阶梁单元模拟橡胶梁的弯曲大变形,计算精度较高,但由于自由度较多,且非线性材料本身收敛迭代次数较多,导致计算时间较长,对计算机硬件有较高要求。目前,涉及二维绝对节点坐标剪切梁单元在超弹性材料非线性方面的力学特性研究较少。二维绝对节点坐标剪切梁单元的自由度数明显少于三维高阶梁单元。在可以转化为二维问题的情况下,使用二维绝对节点坐标剪切梁单元对提高计算效率具有很大益处。因此课题组基于绝对节点坐标高阶梁单元研究了大变形橡胶梁力学模型的计算精度和计算效率,探索了 3 种不可压缩超弹性模型(Neo-Hookean, Mooney-Rivlin 和 Yeoh)模拟橡胶梁大变形力学特性的有效性,以及单元自由度数对计算效率的影响。

1　二维绝对节点坐标横向高阶梁单元

绝对节点坐标法在绝对坐标系下假设单元内任意一点位置坐标的多项式位移场。目前存在 3 种二维绝对节点坐标横向高阶梁单元,分别由 Patel 等[16]2929 和 Zhao 等[11]482 提出。它们的多项式位移模式如表 1 所示。其中:r_i 为单元内任意一点的位置坐标,二维情况下,$i=1,2$;$a_{i1} \sim a_{i8}$ 为多项式位移模式的未知系数。利用节点广义坐标,推导得到单元形函数,这样任意一点的位置坐标矢量 $\boldsymbol{r}$ 可表示成形函数矩阵 $\boldsymbol{S}$ 和单元广义坐标列阵 $\boldsymbol{e}$ 的表达式:

$$\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}=\boldsymbol{S}(x,y)\boldsymbol{e}=\begin{bmatrix} S_1\boldsymbol{e} \\ S_1\boldsymbol{e} \end{bmatrix}。\tag{1}$$

式中:形函数 $\boldsymbol{S}$ 是单元坐标 x 和 y 的函数,是 $2\times n$ 矩阵函数,n 代表单元自由度数。

表 1　二维横向高阶 ANCF 梁单元

Table 1　Two-dimensional transverse high-order ANCF beam element

单元模型	节点广义坐标	位移多项式
HB2n-16[16]2120	$r_i, r_{i,x}, r_{i,y}, r_{i,yy}$	$r_i=a_{i1}+a_{i2}x+a_{i3}y+a_{i4}xy+a_{i5}x^2+a_{i6}y^2+a_{i7}xy^2+a_{i8}x^3$
HB2n-12[11]478	$r_i, r_{i,x}, r_{i,y}$	$r_i=a_{i1}+a_{i2}x+a_{i3}y+a_{i4}xy+a_{i5}(x^2+y^2)+a_{i6}x^3$
HB3n-12[11]479	$r_i, r_{i,y}$	$r_i=a_{i1}+a_{i2}x+a_{i3}y+a_{i4}xy+a_{i5}(x^2+y^2)+a_{i6}x^2y$

拉格朗日方程是建立单元运动微分方程的常用方法,其表达式如下:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{e}}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{e}}+\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{e}}=\boldsymbol{Q}_{\mathrm{K}}。\tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{K}}$ 为广义外力列阵;t 是时间。

在利用拉格朗日方程建立单元运动微分方程时需要建立单元的动能 T 和应变能 U 微分方程,且有:

$$T=\frac{1}{2}\int_V \rho \dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{e}}。\tag{3}$$

式中:$\dot{\boldsymbol{r}}$ 是位置坐标矢量 $\boldsymbol{r}$ 对时间的导数;$\dot{\boldsymbol{e}}$ 是单元节点广义坐标 $\boldsymbol{e}$ 对时间的导数;ρ 和 V 分别为材料密度和单元体积;$\boldsymbol{M}$ 为单元质量矩阵。

根据公式(3)得单元的质量矩阵为:

$$\boldsymbol{M} = \int_V \rho \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S} \mathrm{d}V。 \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$是形函数矩阵的转置。

超弹性材料单元应变能 U 是由单元应变能密度函数积分得到。将动能和应变能代入拉格朗日方程,则单元的运动微分方程为:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{Q}_{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{K}}。 \tag{5}$$

式中:$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{T}}$为单元弹性力列阵,由单元应变能 U 对单元节点广义坐标 $\boldsymbol{e}$ 求偏导得到。

2 不可压缩超弹性本构弹性力模型

橡胶材料的应力与应变关系是非线性的,其材料力学特性目前主要由应变能密度函数来表示[23]。通过对应变能密度函数积分得到应变能,应变能对单元广义坐标列阵 $\boldsymbol{e}$ 求偏导得到弹性力列阵。为了保证单元的不可压缩性,课题组采用了罚函数法。

2.1 Neo-Hookean 模型

不可压缩 Neo-Hookean 模型的应变能密度函数为:

$$W = C_{10}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}) - 3\} + \frac{\alpha}{2}(\det(\boldsymbol{J}) - 1)^2。 \tag{6}$$

式中:$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$ 是右格林柯西应变张量;$\boldsymbol{J}$ 是位置梯度矩阵;$\mathrm{tr}(\boldsymbol{C})$是矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的迹;$\det(\boldsymbol{J})$是矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的行列式,为了满足单元的不可压缩性,通过不断的调整惩罚系数 α,使得 $\det(\boldsymbol{J}) = 1$;C_{10}是材料系数。

对于初始是直梁的情况,根据方程(1),单元内任意一点的位置梯度:

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_{1x} & \boldsymbol{r}_{1y} \\ \boldsymbol{r}_{2x} & \boldsymbol{r}_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{1x}\boldsymbol{e} & \boldsymbol{S}_{1y}\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{S}_{2x}\boldsymbol{e} & \boldsymbol{S}_{2y}\boldsymbol{e} \end{bmatrix}。 \tag{7}$$

式中:$\boldsymbol{r}_{1x}$和 $\boldsymbol{r}_{1y}$是 r_1分别对 x 和 y 的导数;$\boldsymbol{r}_{2x}$和 $\boldsymbol{r}_{2y}$是 r_2分别对 x 和 y 的导数;$\boldsymbol{S}_{1x}$和 $\boldsymbol{S}_{1y}$是 S_1分别对 x 和 y 的导数;$\boldsymbol{S}_{2x}$和 $\boldsymbol{S}_{2y}$是 S_2分别对 x 和 y 的导数。将式(7)代入式(6),并进行积分得不可压缩 Neo-Hookean 模型的应变能为:

$$U = \int_V C_{10}(\boldsymbol{r}_{1x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{1x} + \boldsymbol{r}_{2x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{2x} + \boldsymbol{r}_{1y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{1y} + \boldsymbol{r}_{2y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{2y} - 3) + \frac{\alpha}{2}(\boldsymbol{r}_{1x}\boldsymbol{r}_{2y} - \boldsymbol{r}_{1y}\boldsymbol{r}_{2x} - 1)^2 \mathrm{d}V。 \tag{8}$$

将方程(8)对单元节点广义坐标列阵 $\boldsymbol{e}$ 求导,得单元弹性力列阵 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{T}}$,并根据方程(7)可进一步将单元弹性力列阵表示为:

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{T}} = \int_V C_{10}\boldsymbol{S}_{\mathrm{AB}}\boldsymbol{e} + \alpha(\boldsymbol{S}_{1x}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{2y}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{S}_{2x}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{1y}\boldsymbol{e} - 1) \cdot (\boldsymbol{S}_{2y}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{1x}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}_{1x}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{2y}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{S}_{1y}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{2x}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{S}_{2x}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{1y}^{\mathrm{T}})\mathrm{d}V。 \tag{9}$$

式中:$\boldsymbol{S}_{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{aa}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{bb}}$;$\boldsymbol{S}_{\mathrm{aa}} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{S}_{\mathrm{bb}} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{b}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{S}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{S}_{1x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{1x} + \boldsymbol{S}_{2x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{2x}$;$\boldsymbol{S}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{S}_{1y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{1y} + \boldsymbol{S}_{2y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{2y}$。

2.2 Mooney-Rivlin 模型

不可压缩 Mooney-Rivlin 模型的应变能密度函数为:

$$W = C_{10}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}) - 3\} + \frac{1}{2}C_{01}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{C})^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^2) - 3\} + \frac{\alpha}{2}[\det(\boldsymbol{J}) - 1]^2。 \tag{10}$$

式中 C_{10},C_{01}是材料系数。

将方程(7)代入方程(10)并进行积分,得不可压缩 Mooney-Rivlin 模型的应变能为:

$$U = \int_V C_{10}(\boldsymbol{r}_{1x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{1x} + \boldsymbol{r}_{2x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{2x} + \boldsymbol{r}_{1y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{1y} + \boldsymbol{r}_{2y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{2y} - 3) + \frac{1}{2}C_{01}((\boldsymbol{r}_{1x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{1x} + \boldsymbol{r}_{2x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{2x} + \boldsymbol{r}_{1y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{1y} + \boldsymbol{r}_{2y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{2y})^2 - ((\boldsymbol{r}_{1x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{1x} + \boldsymbol{r}_{2y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{2y})^2 + 2(\boldsymbol{r}_{1x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{1y} + \boldsymbol{r}_{2x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{2y})(\boldsymbol{r}_{1y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{1x} + \boldsymbol{r}_{2y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{2x}) + (\boldsymbol{r}_{1y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{1y} + \boldsymbol{r}_{2y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{2y})^2) - 3) + \frac{\alpha}{2}(\boldsymbol{r}_{1x}\boldsymbol{r}_{2y} - \boldsymbol{r}_{1y}\boldsymbol{r}_{2x} - 1)^2 \mathrm{d}V。 \tag{11}$$

将方程(11)对单元节点广义坐标列阵 $\boldsymbol{e}$ 求导,并根据方程(7)进一步推导出单元弹性力列阵:

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{T}} = \int_V C_{10}\boldsymbol{S}_{\mathrm{AB}}\boldsymbol{e} + C_{01}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{\mathrm{ab}}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{\mathrm{AB}}\boldsymbol{e} - C_{01}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{\mathrm{aa}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{\mathrm{bb}} + 2\boldsymbol{S}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{\mathrm{cc}})\boldsymbol{e} + \alpha(\boldsymbol{S}_{1x}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{2y}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{S}_{2x}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{1y}\boldsymbol{e} - 1)(\boldsymbol{S}_{2y}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{1x}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}_{1x}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{2y}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{S}_{1y}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{2x}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{S}_{2x}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{1y}^{\mathrm{T}})\mathrm{d}V。 \tag{12}$$

式中:$\boldsymbol{S}_{\mathrm{ab}} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{b}}$;$\boldsymbol{S}_{\mathrm{cc}} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{c}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{S}_{\mathrm{c}} = \boldsymbol{S}_{1x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{1y} + \boldsymbol{S}_{2x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{2y}$。

2.3 Yeoh 模型

不可压缩 Yeoh 模型的应变能密度函数为:

$$W = C_{10}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}) - 3\} + C_{20}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}) - 3\}^2 + C_{30}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}) - 3\}^2 + \frac{\alpha}{2}[\det(\boldsymbol{J}) - 1]^2。 \tag{13}$$

式中 C_{10},C_{20}和 C_{30}是材料系数。

将方程(7)代入方程(13),并进行积分得不可压缩 Yeoh 模型的应变能为:

$$U = \int_V C_{10}(\boldsymbol{r}_{1x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{1x} + \boldsymbol{r}_{2x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{2x} + \boldsymbol{r}_{1y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{1y} + \boldsymbol{r}_{2y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{2y} - 3) + C_{20}(\boldsymbol{r}_{1x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{1x} + \boldsymbol{r}_{2x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{2x} + \boldsymbol{r}_{1y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{1y} + \boldsymbol{r}_{2y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{2y} - 3)^2 + C_{30}(\boldsymbol{r}_{1x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{1x} + \boldsymbol{r}_{2x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{2x} + \boldsymbol{r}_{1y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{1y} + \boldsymbol{r}_{2y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{2y} - 3)^3 + \frac{\alpha}{2}(\boldsymbol{r}_{1x}\boldsymbol{r}_{2y} - \boldsymbol{r}_{1y}\boldsymbol{r}_{2x} - 1)^2 \mathrm{d}V。 \tag{14}$$

将方程(14)对单元节点广义坐标列阵 $\boldsymbol{e}$ 求导,并根据方程(7)进一步推导单元弹性力列阵:

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{T}} = \int_V (C_{10} + 2C_{20}(\boldsymbol{S}_{\mathrm{AB}}\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{\mathrm{AB}} - 3) + 3C_{30}(\boldsymbol{S}_{\mathrm{AB}}\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{\mathrm{AB}} - 3)^2)\boldsymbol{S}_{\mathrm{AB}}\boldsymbol{e} + \alpha(\boldsymbol{S}_{1x}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{2y}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{S}_{2x}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{1y}\boldsymbol{e} -$$

$$1)(\boldsymbol{S}_{2y}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{1x}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}_{1x}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{2y}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{S}_{1y}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{2x}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{S}_{2x}\boldsymbol{e}\boldsymbol{S}_{1y}^{\mathrm{T}})\mathrm{d}V。\tag{15}$$

3　算例分析

课题组利用静态和动态大变形实例研究了 3 种不可压缩超弹性模型 Neo-Hookean, Mooney-Rivlin 和 Yeoh,以及二维绝对节点坐标高阶梁单元模拟橡胶梁大变形力学特性的有效性。

3.1　静态大变形

静态大变形实例选用的是受重力作用的橡胶悬臂梁。静态悬臂梁模型如图 1 所示,橡胶梁左端固定,另一端自由,整个梁在自身重力作用下产生大变形。重力常数 $g=9.81\ \mathrm{m/s^2}$,橡胶梁长 $l=160$ mm,宽 $w=7$ mm,高 $h=5$ mm。橡胶梁材料参数如表 2 所示。其中 Neo-Hookean 模型与 Yeoh 模型参数与文献[18]中使用参数相同,材料密度为 2 150 $\mathrm{kg/m^3}$, Mooney-Rivlin 模型参数与文献[19]中使用参数相同,材料密度为 7 200 $\mathrm{kg/m^3}$,选取惩罚系数 $\alpha=1\ 000$ MPa。

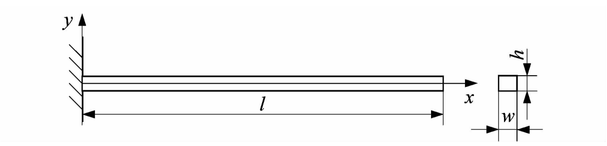

图 1　静态悬臂梁模型

Figure 1　Static cantilever beam model

表 2　各模型的材料参数

Table 2　Material parameters of each model

材料模型	材料系数/MPa
Neo-Hookean	$C_{10}=0.953\ 018\ 000$
Mooney-Rivlin	$C_{10}=0.800\ 000\ 000$
	$C_{01}=0.200\ 000\ 000$
Yeoh	$C_{10}=0.545\ 235\ 000$
	$C_{20}=0.061\ 049\ 800$
	$C_{30}=-0.000\ 802\ 537$

3.1.1　收敛速度

在采用 Neo-Hookean, Mooney-Rivlin 和 Yeoh 的 3 种不可压缩超弹性模型下, HB2n-12, HB3n-12 和 HB2n-16 的收敛情况如图 2 所示。从图 2 可以看出,在 Neo-Hookean, Mooney-Rivlin 和 Yeoh 的 3 种不可压缩超弹性模型下, HB3n-12 收敛需要的单元数最少, HB2n-12 次之, HB2n-16 最多。

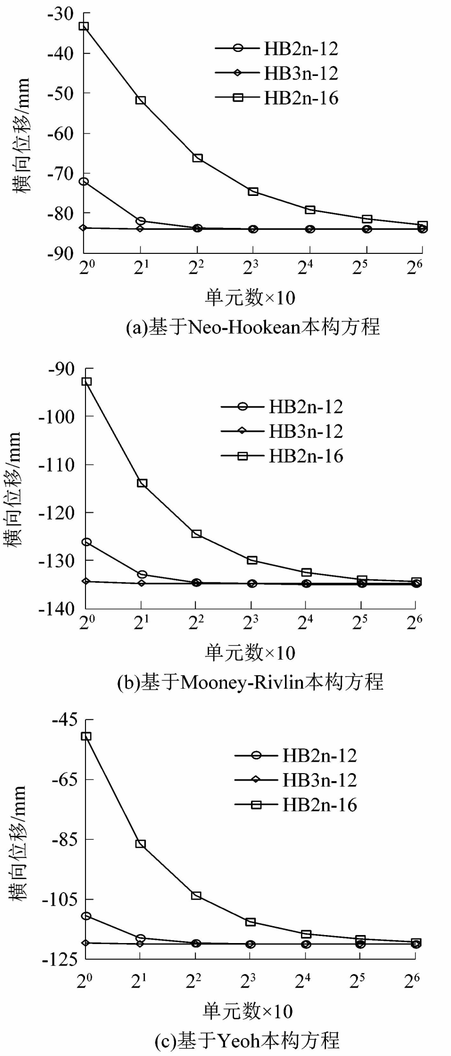

图 2　基于不可压缩超弹性模型的二维高阶梁单元计算悬臂梁位移收敛速度

Figure 2　Convergence rates of cantilever beam displacement calculated by two-dimensional high-order beam element based on incompressible hyperelastic model

3.1.2　收敛精度

表 3 所示为各个单元在不可压缩超弹性模型下的悬臂梁自由端部纵横向位移的收敛值,结果与 Omar 提出的二维绝对节点坐标低阶单元[4]566进行对比,表中用 LB2n-12 表示该单元模型,亦与 ABAQUS 的结果对比。从表 3 可以看出:①二维绝对节点坐标低阶单元在 3 种不可压缩超弹性模型下的结果与高阶单元和 ABAQUS 软件的结果相比偏小很多;②对于 Neo-Hookean 模型,二维绝对节点坐标高阶单元的结果与 ABAQUS 软件的结果相差较大;③对于 Mooney-Rivlin 模型,二维绝对节点坐标高阶单元的结果与 ABAQUS 软件的结果比较接近;④对于 Yeoh 模型,二维绝对节点坐标高阶单元的结果与 ABAQUS 软件的结果非常接近。可见 Yeoh 模型是最适合超弹性大变形分析的,二维绝对节点坐标高阶梁单元从收敛精度的角度最适合超弹性大变形分析。

表3　3种不可压缩超弹性模型下二维高阶梁单元计算悬臂梁位移精度

Table 3　Convergence precision of two dimensional high-order beam elements with three incompressible hyperelastic models

单元模型	Neo-Hookean 模型		Mooney-Rivlin 模型		Yeoh 模型	
	u_x/mm	u_y/mm	u_x/mm	u_y/mm	u_x/mm	u_y/mm
HB2n-12[160]	-27.92	-84.00	-92.88	-134.87	-65.50	-119.86
HB3n-12[160]	-27.88	-83.93	-92.93	-134.91	-65.55	-119.90
HB2n-16[640]	-27.24	-82.86	-92.42	-134.48	-64.90	-119.25
LB2n-12[160]	-0.16	-1.04	-0.19	-3.57	-0.07	-1.23
ABAQUS[160]	-39.58	-98.04	-95.07	-135.85	-65.55	-120.79

注:方括号中数据为单元数。

3.2　动态大变形

动态大变形实例选用的是受重力作用的柔性单摆,具体模型如图3所示。单摆的物理参数:长 $l=350$ mm,宽 $w=7$ mm,高 $h=5$ mm。材料参数与静力学相同,具体参数如表2所示。单摆的一端通过销与地面连接。单摆初始位置水平,初速度为零。重力常数 $g=9.81\ \mathrm{m/s^2}$。本算例中的柔性单摆在摆动过程中会产生较大变形。

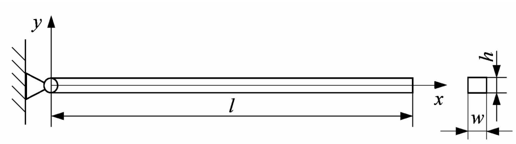

图3　柔性单摆模型

Figure 3　Flexible pendulum model

3.2.1　收敛速度

在采用 Neo-Hookean, Mooney-Rivlin 和 Yeoh 的3种不可压缩超弹性模型下,HB2n-12,HB3n-12 和 HB2n-16 的收敛情况是基本一致,所以只展示了图4所示的 Yeoh 不可压缩超弹性模型下,HB2n-12,HB3n-12 和 HB2n-16 的收敛情况。从图4可以看出,HB3n-12 收敛需要的单元数是16,而 HB2n-12 和 HB2n-16 收敛需要的单元数是32。

3.2.2　收敛精度

根据 HB2n-12,HB3n-12 和 HB2n-16 收敛需要的单元数,选择了32个单元分析 Neo-Hookean, Mooney-Rivlin 和 Yeoh 的3种不可压缩超弹性模型的计算精度,结果如图5所示。从图5可以看出:①对于 Neo-Hookean 和 Mooney-Rivlin 模型,二维绝对节点坐标高阶单元的结果在0.2,0.3,0.4和0.5 s,变形越来越大时与 ABAQUS 软件的结果相差越来越大;②对于 Yeoh 模型,二维绝对节点坐标高阶单元的结果在0.0,0.1,0.2,0.3,0.4和0.5 s,与 ABAQUS 软件的结果都非常

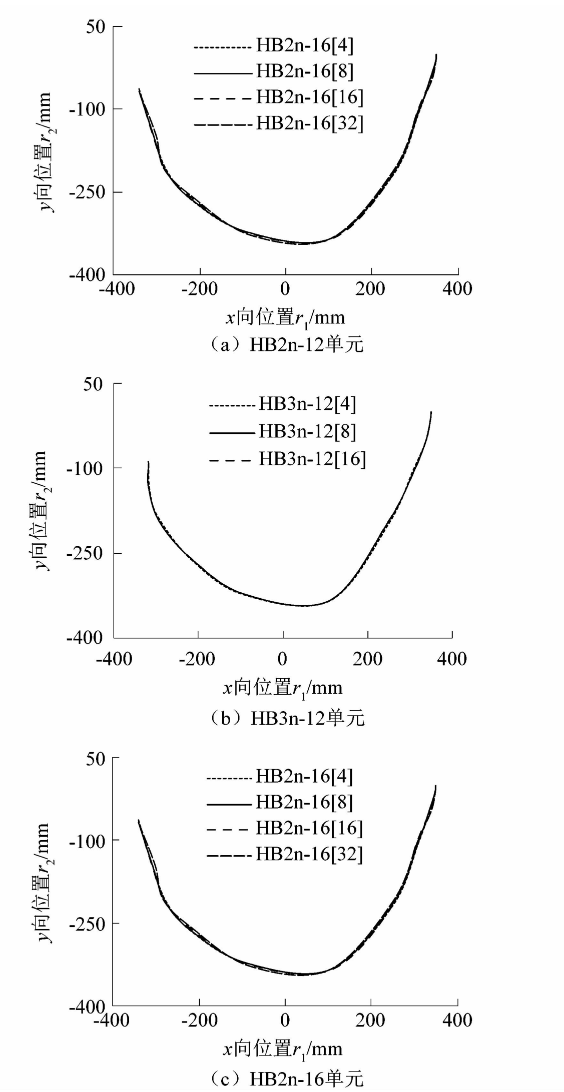

图4　基于 Yeoh 本构方程不同单元模型的收敛速度

Figure 4　Convergence rates of different element models based on Yeoh constitutive equation

接近。因此,Yeoh 模型是最适合超弹性大变形分析的。从图5(c)可以看出,二维绝对节点坐标高阶梁单元从收敛精度的角度都适合超弹性大变形分析。

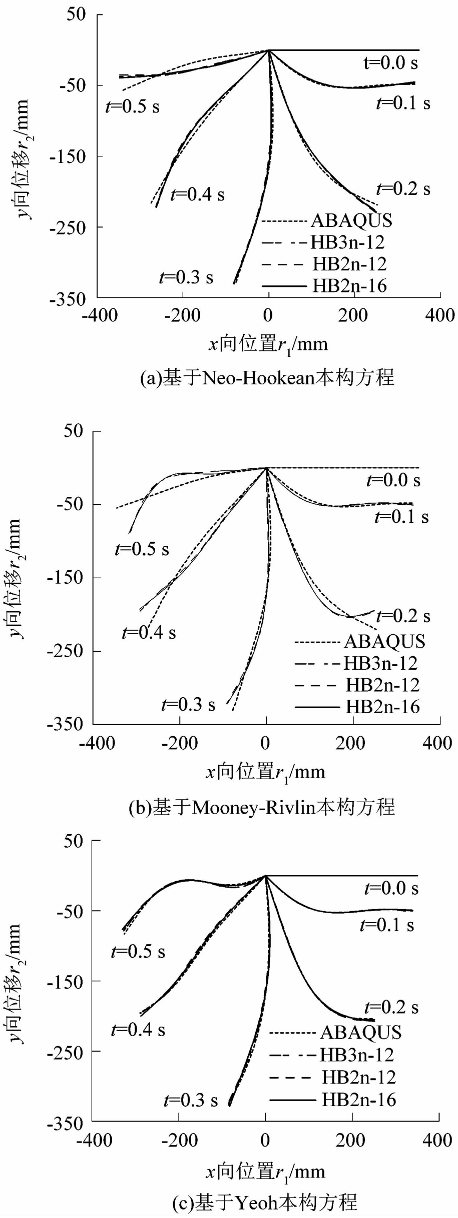

图 5　基于 3 种不可压缩超弹性模型各单元模型模拟的橡胶单摆在不同时刻的构型图

Figure 5　Configuration diagrams of rubber pendulum at different moments simulated by each element model based on three incompressible hyperelastic models

3.3　计算效率分析

从 3.1 和 3.2 节可知，Yeoh 模型是最适合橡胶梁大变形力学特性分析的。橡胶梁大变形力学特性分析需要考虑梁的几何非线性和材料非线性，因此对模型的计算效率提出了比较大的挑战。已知 3 种二维绝对节点坐标高阶梁单元收敛所需单元数是不同的，HB3n-12 收敛所需要单元数最少，最容易收敛，HB2n-12 次之，HB2n-16 收敛所需要单元数最多。这与单元的构造即单元位移模式和节点广义坐标类型有关。

此外，相同单元数下，3 个单元的 CPU 运行时间也是不一样的。表 4 所示为 HB2n-12，HB3n-12 和 HB2n-16 计算动态大变形实例 0.5 s 所消耗的 CPU 运行时间（仿真环境为 8 GB 运行内存，Inter Core i5-5200U，CPU 主频为 2.20 GHz 的计算平台）。从表 4 可以看出，在单元数分别是 4，8，16 和 32 时，HB3n-12 和 HB2n-12 所消耗 CPU 运行时间相差不大，HB3n-12 比 HB2n-12 多一些时间，而 HB2n-16 所消耗 CPU 运行时间就远多于 HB3n-12 和 HB2n-12，虽然 HB2n-16 的自由度数 16 只比 HB3n-12 和 HB2n-12 的自由度数 12 多了 4，但 CPU 运行时间已经达到它们的 2 倍左右。因此单元自由度数对计算效率影响较大。

表 4　各单元 CPU 运行时间

Table 4　CPU running time of each element

单元数	CPU 运行时间 t/s		
	HB2n-12	HB3n-12	HB2n-16
4	695.07	823.78	1 677.81
8	1 293.55	1 350.68	2 835.91
16	2 228.41	2 811.80	5 080.89
32	5 658.72	6 178.43	10 984.10

4　结论

课题组基于绝对节点坐标法研究了 HB2n-12，HB3n-12 和 HB2n-16 的 3 种二维高阶单元和 Neo-Hookean，Mooney-Rivlin 和 Yeoh 的 3 种不可压缩超弹性模型模拟橡胶梁大变形的力学特性。基于静态和动态大变形实例，分析了 3 种单元的计算精度和计算效率以及 3 种不可压缩超弹性模型模拟橡胶梁大变形力学特性的有效性。具体结论如下：

1）Yeoh 模型是最适合超弹性大变形分析；从计算精度角度二维绝对节点坐标高阶梁单元都适合超弹性大变形分析，但它们的计算效率相差较大。

2）HB3n-12 收敛需要的单元数最少，最容易收敛，HB2n-12 次之，HB2n-16 收敛所需要单元数最多。这与单元的构造即单元位移模式和节点广义坐标类型有关。

3）相同单元数下，HB2n-16 所消耗 CPU 运行时间是 HB3n-12 和 HB2n-12 所消耗的 2 倍左右，因此单元自由度数对 CPU 运行时间影响较大。

因此，橡胶梁大变形分析适合采用 Yeoh 模型，单元多项式位移模式、节点广义坐标类型以及单元自由度数对单元计算效率影响较大。

参考文献：

［1］　SHABANA A A. Flexible multibody dynamics: review of past and recent developments[J]. Multibody System Dynamics,1997,1(2):189 -222.

[2] GERSTMAYR J, SUGIYAMA H, MIKKOLA A. Review on the absolute nodal coordinate formulation for large deformation analysis of multibody systems [J]. Journal of Computational Nonlinear Dynamics,2013,8(3):031016 -1 -031016 -12.

[3] NACHBAGAUER K. State of the art of ANCF elements regarding geometric description, interpolation strategies, definition of elastic forces, validation and the locking phenomenon in comparison with proposed beam finite elements [J]. Archives of Computational Methods in Engineering,2014,21(3):293 -319.

[4] OMAR M A, SHABANA A A. A two-dimension shear deformable beam for large rotation and deformation problems [J]. Journal of Sound and Vibration,2001,243(3):565 -576.

[5] KERKKAENEN K S, SOPANEN J T, MIKKOLA A M. A linear beam finite element based on the absolute nodal coordinate formulation [J]. Journal of Mechanical Design,2005,127(4): 621 -630.

[6] GARCIA-VALLEJO D, MIKKOLA A M, ESCALONA J L. A new locking-free shear deformable finite element based on absolute nodal coordinates [J]. Nonlinear Dynamics,2007,50(1):249 -264.

[7] YAKOUB R Y, SHABANA A A. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: implementation and applications [J]. Journal of Mechanical Design,2001,123(4):614 -621.

[8] GERSTMAYR J, MATIKAINEN M K. Analysis of stress and strain in the absolute nodal coordinate formulation with nonlinear material behavior[J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2006,34(4):409 -430.

[9] YU H D, ZHAO C Z, ZHENG B, et al. A new higher-order locking-free beam element based on the absolute nodal coordinate formulation [J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 2018, 232 (19): 3410 -3423.

[10] SHEN Z X, LI P, LIU C, et al. A finite element beam model including cross-section distortion in the absolute nodal coordinate formulation [J]. Nonlinear Dynamics,2014,77(3):1019 -1033.

[11] ZHAO C H, BAO K W, TAO Y L. Transversally higher-order interpolating polynomials for the two-dimensional shear deformable ANCF beam elements based on common coefficients [J]. Multibody System Dynamics,2021,51(4):475 -495.

[12] NACHBAGAUER K, GERSTMAYR J. Structural and continuum mechanics approaches for a 3D shear deformable ANCF beam finite element: application to buckling and nonlinear dynamic examples [J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2014, 9 (1):011013 -1 -011013 -8.

[13] LI P F, GaNTOI F M, SHABANA A A. Higher order representation of the beam cross section deformation in large displacement finite element analysis [J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, 330 (26):6495 -6508.

[14] ORZECHOWSKI G, SHABANA A A. Analysis of warping deformation modes using higher order ANCF beam element [J]. Journal of Sound and Vibration,2016,363:428 -445.

[15] EBEL H, MATIKAINEN M K, HURSKAINEN V V, et al. Higher-order beam elements based on the absolute nodal coordinate formulation for three-dimensional elasticity [J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 88(1):1075 -1091.

[16] PATEL M, SHABANA A A. Locking alleviation in the large displacement analysis of beam elements: the strain split method [J]. Acta Mechanica,2018,229(7):2923 -2946.

[17] MAQUEDA L G, SHABANA A A. Poisson modes and general nonlinear constitutive models in the large displacement analysis of beams [J]. Multibody System Dynamics,2007,18(3):375 -396.

[18] JUNG S P, PARK T W, CHUNG W S. Dynamic analysis of rubber-like material using absolute nodal coordinate formulation based on the non-linear constitutive law [J]. Nonlinear Dynamics,2011,63(1/2):149 -157.

[19] ORZECHOWSKI G, FRCZEK J. Nearly incompressible nonlinear material models in the large deformation analysis of beams using ANCF [J]. Nonlinear Dynamics,2015,82(1):451 -464.

[20] ORZECHOWSKI G, FRCZEK J. Volumetric locking suppression method for nearly incompressible nonlinear elastic multi-layer beams using ANCF elements [J]. Journal of Theoretical and Applied Mechanics,2017,55(3):977 -990.

[21] XU Q P, LIU J Y. An improved dynamic model for a silicone material beam with large deformation [J]. Acta Mechanica Sinica, 2018,34(4):744 -753.

[22] XU Q P, LIU J Y, QU L Z. Dynamic modeling for silicone beams using higher-order ANCF beam elements and experiment investigation [J]. Multibody System Dynamics,2019,46(4):307 -328.

[23] BECHIR H, CHEVALIER L, CHAOUCHE M, et al. Hyperelastic constitutive model for rubber-like materials based on the first Seth strain measures invariant [J]. European Journal of Mechanics, 2006,25(1):110 -124.