# [研究・设计]

DOI:10.3969/j.issn.1005-2895.2022.04.002

# 耦合四连杆机构等效刚度计算

黄 双,武 欣,李培兴

(上海工程技术大学 机械与汽车工程学院,上海 201620)

摘 要:为正确求解簇绒地毯织机转子系统的振动特性(固有频率、振型和临界转速等),课题组采用能量法对针曲柄摇 杆机构的等效线刚度和等效转动刚度进行研究。将各转子间耦合单元的曲柄摇杆机构视成多个刚架;对于每一个刚架, 施加单位力和单位力矩,采用能量法对等效线刚度和转动刚度进行求解。结果表明:针曲柄摇杆机构的等效线刚度和转 动刚度变化较大,随曲柄转动而周期变化的等效刚度不可看做常数,需考虑时变刚度对系统振动特性的影响。该研究为 等效刚度的求解提供了一个新思路。

关键 词:纺织装备;耦合四连杆机构;等效刚度;能量法
 中图分类号:TH133 文献标志码:A 文章编号:1005-2895(2022)04-0006-06

# Equivalent Stiffness Calculation of Coupled Four Bar Linkage

HUANG Shuang, WU Xin, LI Peixing

(School of Mechanical and Automotive Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China)

Abstract: In order to correctly solve the vibration characteristics of the rotor system of a tufted carpet loom (natural frequency, vibration mode and critical speed, etc.), the energy method was used to investigate the equivalent linear stiffness and equivalent rotational stiffness of the needle crank rocker mechanism. Treating the crank rocker mechanism of the coupling unit between rotors as multiple rigid frames, unit forces and unit moments were applied for each rigid frame, and the equivalent linear stiffness and rotational stiffness were solved using the energy method. The results show that the equivalent linear stiffness and rotational stiffness of the needle crank rocker mechanism change greatly, and the equivalent stiffness that changes periodically with the rotation of the crank cannot be regarded as a constant, and the influence of time-varying stiffness on the vibration characteristics of the system should be considered. This study provides a new idea for the solution of equivalent stiffness.

Keywords: textile equipment; coupled four bar linkage; equivalent stiffness; energy method

纺织机械装备中,转子系统是重要的执行机构,如 簇绒地毯织机和经编机等<sup>[13]</sup>。以簇绒地毯织机为例, 簇绒地毯的织造质量主要取决于转子系统的运动平稳 性和动力学特性,织造效率主要取决于转子系统的转 速<sup>[4]</sup>。转子系统的振动会引起纱线的张力波动,使得 纱线的喂纱量无法达到指定数值,从而影响地毯毯面 质量<sup>[56]</sup>。转子系统的振动还会加速各配合零部件间 的磨损,减少设备的使用寿命。另外,根据对簇绒地毯 织机整机噪声源识别和定位可知,转子系统的结构振动是整机噪声的主要来源。因此,清晰了解转子系统的振动特性有着重要意义。为了准确求解转子系统的振动特性,各转子间耦合四连杆机构的等效刚度(包括线刚度和转动刚度)的取值尤为重要。

目前,关于多转子系统中耦合单元四连杆机构的 等效刚度计算研究相对较少,大部分学者主要集中于 研究四连杆机构的动力学和运动学特性。张建军

#### 收稿日期:2022-02-10;修回日期:2022-05-18

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51905331);上海工程技术大学青年科研团队培育计划(QNTD202112)。 第一作者简介:黄双(1989),女,湖北荆州人,博士,副教授,硕士生导师,主要研究方向为高端纺织装备振动与噪声分析。Email:huangshuang1989@126.com 等<sup>[7]</sup>利用欧拉公式建立了四连杆机构的动力学模型, 采用 MATLAB/Simulink 建立运动学仿真模型,对四连 杆机构中各构件的角位移、角速度和角加速度进行求 解;郭文静等<sup>[8]</sup>利用 MATLAB 对铝锭连铸及接锭装置 的运动轨迹、速度和加速度等运动特性进行分析;基于 多体动力学原理,李园园等<sup>[9]</sup>运用四阶 Runge-Kutta 法分析铰链间隙关节位置、数量和润滑对空载四连杆 机构的动力学响应特性。Tari 等<sup>[10]</sup>提出了基于多项 式法对柔性四杆机构的运动方程和静态方程解耦。

针对簇绒地毯织机转子系统,课题组采用能量法 对针曲柄摇杆机构的等效线刚度和等效转动刚度进行 研究,为转子系统中等效刚度的求解提供了一种新的 思路。

# 1 簇绒地毯织机转子系统结构简介

簇绒地毯织机的转子系统如图 1 所示,由主轴、针 轴和钩轴 3 转子组成,3 转子之间由针曲柄摇杆机构 和钩曲柄摇杆机构耦合而成。在针轴上,均匀布置着 10 套针摇杆滑块机构,通过滑块的往复上下运动,带 动针排运动,完成针的穿刺运动。在钩轴上,均匀布置 着 10 套钩摆杆机构,通过与针机构的精确配合,钩的 左右摆动运动带动纱线形成绒圈。





在转子系统中,主轴和针轴之间通过针曲柄摇杆 机构传递动力,主轴和钩轴之间通过钩曲柄摇杆机构 传递动力。在求解转子系统振动特性(包括固有频 率、临界转速和振型)等时,针曲柄摇杆机构需等效为 具有线刚度 K<sub>h</sub> 和转动刚度 K<sub>c</sub> 的弹簧,如图 2 所示。 为了得到正确的振动特性结果,等效线刚度和等效转 动刚度的参数值显得尤为重要。





Figure 2 Schematic of needle crank rocker mechanism

# 2 基于能量法的等效刚度计算

## 2.1 能量法原理简介

根据能量守恒原理,积蓄在弹性体内的应变能  $V_s$ 在数值上等于载荷所作的功 W,即  $V_s = W$ 。能量法是 基于功能原理求解弹性体变形及位移等的一种方法。 弹性体在拉伸、扭转和弯曲组合变形时,微段截面上内 力有轴力 F、扭矩  $M_x$  和弯矩 M,分别产生的位移为 d( $\Delta l$ ),d( $\theta$ )和 d( $\varphi$ )。已知弹性体的弹性模量为 E, 截面面积为 A,剪切弹性模量为 G,横截面的极惯性矩 为 $I_p$ ,横截面对中心轴的惯性矩为 I。在弹性体微段上 的应变能为各种内力在该微段上各自产生应变能的 积,即:

$$\begin{split} \mathrm{d} V_{\varepsilon} &= \mathrm{d} W = \frac{1}{2} F\left(x\right) \mathrm{d} \left(\Delta l\right) + \frac{1}{2} M_{x}\left(x\right) \mathrm{d} \left(\theta\right) + \\ \frac{1}{2} M(x) \mathrm{d}(\varphi) &= \frac{F^{2}(x) \mathrm{d} x}{2EA} + \frac{M_{x}^{2}(x) \mathrm{d} x}{2GI_{\mathrm{p}}} + \frac{M^{2}(x) \mathrm{d} x}{2EI}_{\circ} \quad (1) \\ & \bar{\mathcal{R}} \bar{\mathcal{H}} \bar{\mathcal{K}} \mathcal{B} l, \mathcal{M} \\ V_{\varepsilon} &= \int_{l} \frac{F^{2}(x) \mathrm{d} x}{2EA} + \int_{l} \frac{M_{x}^{2}(x) \mathrm{d} x}{2GI_{\mathrm{p}}} + \int_{l} \frac{M^{2}(x) \mathrm{d} x}{2EI}_{\circ} \quad (2) \end{split}$$

转子系统在正常运转下,针曲柄摇杆机构的结构 一直处于运动状态。基于能量法求解等效刚度时,需 将整个针曲柄摇杆机构看成36个刚架,每转动10°为 1个刚架,通过求解每一个刚架的线刚度和转动刚度, 从而得到曲柄摇杆机构在运动过程中的刚度值。

#### 2.2 等效线刚度计算

以针曲柄摇杆机构为例,采用能量法进行求解。 依据图 2(a),针曲柄摇杆机构可以简化为如图 3 所示 的刚架,将曲柄、连杆及摇杆视为 OA,AB 和 BO'。图 3 中, $l_i(i=1,2,3)$ 为各杆长度, $l_4$ 为 OO'之间的距离。 $\alpha$ , $\beta$  和  $\gamma$  分别为杆  $l_1$ , $l_2$  和  $l_3$ 与水平线之间的夹角。 为了求得针曲柄摇杆机构的线刚度,对 O'点施加单位 载荷,即 F=1 N,此时 O'的位移值  $x_{O'}$ 的倒数为所求的 线刚度  $K_h$ 。在 O'点施加单位载荷 F 后,分别对 OA杆、AB 杆和 BO'杆进行受力分析,如图 4 所示。通过 受力分析,各杆的轴力和弯矩值如表 1 所示。



图 3 求解等效线刚度时施加的外力 Figure 3 External force applied when solving equivalent linear stiffness



图4 各杆的受力分析

Figure 4 Stress analysis of each rod

表1 各杆轴力和弯矩值

Table 1 Axial force and bending moment of each rod

| 杆件  | 轴力             | 弯矩                                  |
|-----|----------------|-------------------------------------|
| OA  | $F\cos \alpha$ | $Fx \sin \alpha$                    |
| AB  | $F\cos\gamma$  | $Fl_1 \sin \alpha - Fx \sin \gamma$ |
| BO' | $F \cos \beta$ | $Fx\sin\beta$                       |
|     |                |                                     |

$$-Fl_2\sin\gamma + Fl_3\sin\beta = Fl_1\sin\alpha_{\circ}$$
(3)

基于能量法可知,应变能  $V_e$  在数值上等于载荷所 作的功  $W_e$ ,因此:

$$W_F = V_{\varepsilon^{\circ}} \tag{4}$$

此时,

$$\frac{1}{2}Fx_{0'} = \sum_{l} \int_{l} \frac{F^{2}(x) dx}{2EA} + \sum_{l} \int_{l} \frac{M^{2}(x) dx}{2EI}$$
(5)

其中:

$$\sum_{l} \int_{l} \frac{F^{2}(x) dx}{2EA} = \int_{0}^{l_{1}} \frac{(F\cos\alpha)^{2}}{2E_{1}A_{1}} dx + \int_{0}^{l_{2}} \frac{(F\cos\gamma)^{2}}{2E_{2}A_{2}} dx + \int_{0}^{l_{3}} \frac{(F\cos\beta)^{2}}{2E_{3}A_{3}} dx = \frac{F^{2}l_{1}\cos^{2}\alpha}{2E_{1}A_{1}} + \frac{F^{2}l_{2}\cos^{2}\gamma}{2E_{2}A_{2}} + \frac{F^{2}l_{3}\cos^{2}\beta}{2E_{3}A_{3}};$$
(6)

$$\sum_{l} \int_{l} \frac{M^{2}(x) dx}{2EI} = \int_{0}^{l_{1}} \frac{(Fx \sin \alpha)^{2}}{2E_{1}I_{1}} dx + \int_{0}^{l_{2}} \frac{(Fl_{1} \sin \alpha - Fx \sin \gamma)^{2}}{2E_{2}I_{2}} dx + \int_{0}^{l_{3}} \frac{(Fx \sin \beta)^{2}}{2E_{3}I_{3}} dx = \frac{F^{2}l_{1}^{3} \sin^{2} \alpha}{6E_{1}I_{1}} + \frac{F^{2}l_{1}^{2}l_{2} \sin^{2} \alpha}{2E_{2}I_{2}} - \frac{F^{2}l_{1}l_{2}^{2} \sin^{2} \alpha \sin \gamma}{2E_{2}I_{2}} + \frac{F^{2}l_{3}^{3} \sin^{2} \beta}{6E_{2}I_{2}} + \frac{F^{2}l_{3}^{3} \sin^{2} \beta}{6E_{3}I_{3}} \circ$$
(7)

式中:*E*<sub>1</sub>,*E*<sub>2</sub>和*E*<sub>3</sub>分别为3杆件的弹性模量;*A*<sub>1</sub>,*A*<sub>2</sub>和 *A*<sub>3</sub>分别为3杆件的平均截面面积;*I*<sub>1</sub>,*I*<sub>2</sub>和*I*<sub>3</sub>分别为3 杆件横截面对中心轴的惯性矩。

通过式(5)、式(6)和式(7),可由式(8)求得
$$x_{0'}$$
。  

$$x_{0'} = \frac{Fl_1\cos^2\alpha}{E_1A_1} + \frac{Fl_2\cos^2\gamma}{E_2A_2} + \frac{Fl_3\cos^2\beta}{E_3A_3} + \frac{Fl_1^3\sin^2\alpha}{3E_1I_1} + \frac{Fl_1^2l_2\sin^2\alpha}{E_2I_2} - \frac{Fl_1l_2^2\sin\alpha\sin\gamma}{E_2I_2} + \frac{Fl_2^3\sin^2\gamma}{3E_2I_2} + \frac{Fl_3^3\sin^2\beta}{3E_3I_3}$$
(8)

#### 2.3 等效转动刚度计算

为了求解针曲柄摇杆机构的等效转动刚度,对 O' 施加单位弯矩 M,即 M = 1 N·m,如图 5 所示。在施

加单位力矩后,再次对 OA 杆、AB 杆和 BO'杆进行受力 分析,如图 6 所示。通过受力分析,各杆的轴力和弯矩 值如表 2 所示。





# 表2 各杆轴力和弯矩值

Table 2 Axial force and bending moment of each rod

| 杆件  | 轴力                  | 弯矩  |
|-----|---------------------|---|
| OA  | $(M/l_4)\sin\alpha$ | $(M/l_4)x\cos\alpha$                              |
| AB  | $(M/l_4)\sin\gamma$ | $(M/l_4) x \cos \gamma - (M/l_4) l_1 \cos \alpha$ |
| BO' | $(M/l_4)\sin\beta$  | $(M/l_4) x \cos \beta - M$                        |

对于 AB 杆,为了满足受力平衡,需满足:  

$$-\frac{M}{l_4}l_1\cos\alpha + M = \frac{M}{l_4}l_3\cos\beta + \frac{M}{l_4}l_2\cos\gamma_{\circ} \quad (9)$$

基于能量法,应变能 V。在数值上等于载荷所作的 功 W,,可知:

$$W_M = V_{\varepsilon \circ} \tag{10}$$

此时:

$$\frac{1}{2}M\varphi_{0'} = \sum_{l} \int_{l} \frac{F^{2}(x) \,\mathrm{d}x}{2EA} + \sum_{l} \int_{l} \frac{M^{2}(x) \,\mathrm{d}x}{2EI} \,(11)$$





Figure 6 Stress analysis diagram of each rod

其中:

$$\begin{split} \sum_{l} \int_{l} \frac{F^{2}(x) \, dx}{2EA} &= \int_{0}^{l_{1}} \frac{\left[ (M/l_{4}) \sin \alpha \right]^{2}}{2E_{1}A_{1}} dx + \\ \int_{0}^{l_{2}} \frac{\left[ (M/l_{4}) \sin \gamma \right]^{2}}{2E_{2}A_{2}} dx + \int_{0}^{l_{3}} \frac{\left[ (M/l_{4}) \sin \beta \right]^{2}}{2E_{3}A_{3}} dx &= \\ \frac{M^{2}l_{1} \sin^{2} \alpha}{2E_{1}A_{1}l_{4}^{2}} + \frac{M^{2}l_{2} \sin^{2} \gamma}{2E_{2}A_{2}l_{4}^{2}} + \frac{M^{2}l_{3} \sin^{2} \beta}{2E_{3}A_{3}l_{4}^{2}}; \end{split}$$
(12)  
$$\sum_{l} \int_{l} \frac{M^{2}(x) \, dx}{2EI} = \int_{0}^{l_{1}} \frac{\left[ (M/l_{4}) x \cos \alpha \right]^{2}}{2E_{1}I_{1}} dx + \\ \int_{0}^{l_{2}} \frac{\left[ (M/l_{4}) x \cos \gamma - (M/l_{4}) l_{1} \cos \alpha \right]^{2}}{2E_{2}I_{2}} dx + \\ \int_{0}^{l_{3}} \frac{\left[ (M/l_{4}) x \cos \beta - M \right]^{2}}{2E_{3}I_{3}} dx = \frac{M^{2}l_{1}^{3} \cos^{2} \alpha}{6l_{4}^{2}E_{1}I_{1}} + \\ \frac{M^{2}l_{2}^{3} \cos^{2} \gamma}{6l_{4}^{2}E_{2}I_{2}} - \frac{M^{2}l_{1}l_{2}^{2} \cos^{2} \alpha \cos \gamma}{2l_{4}^{2}E_{2}I_{2}} + \frac{M^{2}l_{1}^{2}l_{2} \cos^{2} \alpha}{2l_{4}^{2}E_{2}I_{2}} + \\ \end{split}$$

$$\frac{M^2 l_3^3 \cos^2 \beta}{6 l_4^2 E_3 I_3} - \frac{M^2 l_3^2 \cos \beta}{2 l_4 E_3 I_3} + \frac{M^2 l_3}{2 E_3 I_3} \circ$$
(13)

由式(11) ~ (13),可得:  

$$\varphi_{0'} = \frac{M l_1 \sin^2 \alpha}{E_1 A_1 l_4^2} + \frac{M l_2 \sin^2 \gamma}{E_2 A_2 l_4^2} + \frac{M l_3 \sin^2 \beta}{E_3 A_3 l_4^2} +$$

$$\frac{Ml_1^3 \cos^2 \alpha}{3l_4^2 E_1 I_1} + \frac{Ml_2^3 \cos^2 \gamma}{3l_4^2 E_2 I_2} - \frac{Ml_1 l_2^2 \cos \alpha \cos \gamma}{l_4^2 E_2 I_2} + \frac{Ml_1^2 l_2 \cos^2 \alpha}{l_4^2 E_2 I_2} + \frac{Ml_3^3 \cos^2 \beta}{3l_4^2 E_2 I_2} - \frac{Ml_3^2 \cos \beta}{l_4 E_3 I_3} + \frac{Ml_3}{E_3 I_3} \circ$$
(14)

## 3 参数计算及求解

## 3.1 参数计算

在簇绒地毯织机的针曲柄摇杆机构中,杆长  $l_1$  = 15 mm, $l_2$  = 138 mm, $l_3$  = 115 mm, $l_4$  = 170 mm;弹性模 量  $E_1, E_2$  和  $E_3$  均为 210 MPa;截面面积  $A_1$  = 0.033 0

 $m^2$ , $A_2 = 0.008 1 m^2$ , $A_3 = 0.013 2 m^2$ ; 横截面对中心轴 的惯性矩  $I_1 = 1.49 \times 10^{-5} m^4$ , $I_2 = 5.46 \times 10^{-6} m^4$ , $I_3 = 2.35 \times 10^{-5} m^4$ 。针曲柄摇杆机构在转动过程中,各杆 之间的角度关系如表 3 所示。

表 3 角度参数值 Table 3 Angle value

| 用度/(*) |       |       |     |       |       |     |       |       |  |  |
|--------|-------|-------|-----|-------|-------|-----|-------|-------|--|--|
| α      | β     | γ     | α   | β     | γ     | α   | β     | γ     |  |  |
| 0      | 59.29 | 45.76 | 120 | 55.01 | 36.06 | 240 | 46.64 | 44.43 |  |  |
| 10     | 60.16 | 44.75 | 130 | 53.71 | 36.05 | 250 | 47.09 | 45.44 |  |  |
| 20     | 60.82 | 43.66 | 140 | 52.42 | 36.20 | 260 | 47.72 | 46.36 |  |  |
| 30     | 61.24 | 42.54 | 150 | 51.19 | 36.51 | 270 | 48.53 | 47.15 |  |  |
| 40     | 61.40 | 41.44 | 160 | 50.04 | 36.98 | 280 | 49.50 | 47.79 |  |  |
| 50     | 61.30 | 40.37 | 170 | 49.01 | 37.60 | 290 | 50.60 | 48.26 |  |  |
| 60     | 60.96 | 39.38 | 180 | 48.12 | 38.35 | 300 | 51.82 | 48.52 |  |  |
| 70     | 60.38 | 38.48 | 190 | 47.39 | 39.21 | 310 | 53.11 | 48.57 |  |  |
| 80     | 59.59 | 37.71 | 200 | 46.85 | 40.18 | 320 | 54.44 | 48.40 |  |  |
| 90     | 58.62 | 37.07 | 210 | 46.50 | 41.21 | 330 | 55.77 | 48.01 |  |  |
| 100    | 57.51 | 36.57 | 220 | 46.34 | 42.28 | 340 | 57.05 | 47.43 |  |  |
| 110    | 56.29 | 36.23 | 230 | 46.39 | 43.37 | 350 | 58.24 | 46.67 |  |  |

## 3.2 求解及结果对比

将 3.1 中的各个参数代入式(8)和式(14),可求 得针曲柄摇杆机构的等效线刚度和转动刚度。基于能 量法所求得的  $K_h$ 和  $K_c$ 刚度值,如图 7 所示。图 7(a) 中,以曲柄的夹角 0°为起始点,在曲柄为 100°时,最大 线刚度为 3.46×10<sup>6</sup>N/m;曲柄为 280°时,最小线刚度 为 1.35×10<sup>6</sup> N/m,平均线刚度为 2.27×10<sup>6</sup> N/m。图 7(b)中,整体的针曲柄摇杆等效转动刚度在 2.46× 10<sup>4</sup>~3.89×10<sup>4</sup> N·m/rad 之间变化,平均值为 3.14× 10<sup>4</sup> N·m/rad。由于针曲柄摇杆机构的等效线刚度和 转动刚度均变化较大,故在进行振动特性分析时,不能 将该刚度值视为常数,应考虑时变参数对系统振动性 能的影响。

# 4 结论

课题组通过对各杆进行受力分析,采用能量法对 多转子系统中的耦联四连杆机构等效线刚度和转动刚 度进行了计算,并分析等效刚度的曲线特点。研究结 果表明在求取振动特性时,等效线刚度和转动刚度为 时变刚度。该结果为振动特性的求解提供了重要参 数。对于不同的四连杆机构,其具体结构对刚度的计



图 7  $K_h$ 和 $K_c$ 刚度值与曲柄转角关系曲线 Figure 7 Curve of stiffness value and crank angle of  $K_h$  and  $K_c$ 

算结果有很大的影响,但本研究的方法和结果可作为 一般借鉴。后续将采用实验方法对本结果进行进一步 验证,并将讨论时变刚度对耦联轴系系统振动和噪声 特性的影响。

## 参考文献:

- [1] 郑宝平,蒋高明,夏风林,等. 双 PID 控制的经编机电子横移系统 设计[J]. 纺织学报,2012,33(5):135-139.
- [2] MERMELSTEIN S P, ACAR M. Modelling the pattern creation process for the optimum design of a circular warp-knitting machine using a conical needle-bed [J]. The Journal of the Textile Institute, 2007,98(5):397-408.
- [3] 李乾坤,孟婥,孙志军,等.基于影响系数法的簇绒地毯织机耦联 主轴动平衡研究[J].机械科学与技术,2013,32(8):1159.
- [4] HUANG S, CHI X F, XU Y, et al. Dynamic characteristics of coupling shaft system in tufting machine based on the Riccati whole transfer matrix method[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 2017, 231(2):356-371.

(下转第17页)