

[研究·设计]

DOI:10.3969/j.issn.1005-2895.2023.02.002

Galileo 数和 Eötvös 数对剪切稀化流体内 气泡非稳态运动特性的影响

梁立军¹, 胡波²

(1. 常州思特恩节能科技有限公司, 江苏常州 213100;
2. 常州大学机械与轨道交通学院, 江苏常州 213164)

摘要:为了探究气泡在剪切稀化流体内的非稳态运动特性,笔者利用 VOF 方法结合连续表面张力模型研究了 Galileo 数和 Eötvös 数对气泡水动力学特性的影响。结果表明:气泡在剪切稀化流体内运动时的水动力学特性与 Galileo 数和 Eötvös 数密切相关;当流变指数和特征时间给定时, Galileo 数和 Eötvös 数的增大(即表面张力和零剪切黏度的减弱)均会导致气泡非稳态运动的出现。因此,提高 Galileo 数和 Eötvös 数能够促进剪切稀化流体内气泡非稳态运动的发生,有利于相间的质量和热量传递。

关键词:剪切稀化流体;非稳态气泡;VOF 法;水动力学特征;Galileo 数;Eötvös 数

中图分类号:O359.1;TH145 文献标志码:A 文章编号:1005-2895(2023)02-0010-08

Effects of Galileo and Eötvös Number on Unsteady Motion of Bubbles in Shear-Thinning Fluids

LIANG Lijun¹, HU Bo²

(1. Changzhou Siteen Energy Saving Technology Co., Ltd., Changzhou, Jiangsu 213100, China;
2. School of Mechanical Engineering and Rail Transit, Changzhou University, Changzhou, Jiangsu 213164, China)

Abstract: In order to investigate the unsteady motion characteristics of bubbles within shear-thinning fluid, the effects of Galileo number and Eötvös number on the hydrodynamic characteristics of bubbles were studied by using the VOF method in combination with a continuous surface tension model. The results show that the hydrodynamic characteristics of bubbles moving in shear-thinning fluids are closely related to Galileo number and Eötvös number. When rheological index and characteristic time are fixed, an increase in Galileo and Eötvös numbers (i. e., a decrease in surface tension and zero-shear viscosity) will lead to the emergence of bubble unstable motion. Therefore, increasing Galileo number and Eötvös number can promote the unsteady motion of bubbles in shear-thinning fluid, which is beneficial to mass and heat transfer between phases.

Keywords: shear-thinning fluid; unsteady bubble; VOF (Volume of Fluid) method; hydrodynamic characteristics; Galileo number; Eötvös number

气液两相流动广泛存在于废水处理、生物制药及化工过程等工业应用中。气泡的存在改善了液体的混合程度并起到了强化传热的作用^[1-2]。因此,深入研究气泡在液体(特别是非牛顿液相)中的水动力学特性,对提高气液相间的传质传热效率以及改善工业中泡状

流设备的运行效率具有重要作用。

大量的研究表明气泡在液体中的水动力学特性能够呈现出稳态和非稳态 2 种特征。对于稳态气泡,文献[3],[4]第 298 至 300 页和[5]已经进行了大量的报道,不再赘述。对于非稳态气泡,气泡形状呈现出 2

收稿日期:2022-09-14;修回日期:2023-01-06

第一作者简介:梁立军(1976),男,天津人,硕士,工程师,主要研究方向为过滤器和换热器设计。E-mail:lijun.liang@sterntechnik.com

种特征:一是气泡形状虽保持对称,但会出现周期性振荡变形和中心破碎现象;另一种非稳态气泡是气泡的形状不再对称而且气泡会发生非稳态运动。

Tripathi 等^[6]利用流体体积法(VOF)法数值模拟发现,当 Galileo(Ga)数和 Eötvös(Eo)数都较大时,气泡会出现中心破碎现象。Oshaghi 等^[7]实验研究单气泡在不同浓度的羧甲基纤维素 CMC 溶液中自由上浮运动时,发现了形状在碟形与半球形之间周期性振荡的气泡。对于气泡的中心破碎现象,Sharaf 等^[8]认为其与气液黏度比和密度比有一定的关系;当气液黏度比和密度比大于 10^{-3} 时,气泡会出现中心破碎现象。Ohta 等^[9]利用 CLSVOF (couple of level set and VOF) 方法数值研究单气泡在牛顿流体中的水动力学特性时,发现气泡出现中心破碎现象与气泡初始形状有关;在相同的 Eo 数和 Morton(Mo)数下,初始形状为球形的气泡比椭圆形气泡更容易出现中心破碎现象。

对于气泡的形状不对称且气泡发生非稳态运动,早在 1956 年,Saffman^[10]就报道出牛顿流体中气泡非稳态变形是由于高惯性力和高表面张力引起的,气泡上浮路径呈现出之字形或螺旋形。Wu 等^[11]实验发现当气泡的当量直径大于 1.5 mm 时,气泡就会呈现之字形或螺旋形运动。而在非牛顿流体中,复杂的流变特性会加剧气泡非稳态运动的出现。Xu 等^[12]实验研究单气泡在不同浓度 CMC 溶液中上浮运动时,发现随着 CMC 溶液浓度的降低,气泡的非稳态运动变得剧烈。Ohta 等^[13]和 Premlata 等^[14]分别采用 CLSVOF 法和 VOF 法数值模拟三维气泡在剪切稀化流体中自由上浮时,发现液体剪切稀化效应的增强会导致气泡非稳态运动的出现。

综上所述,尽管研究者针对非稳态气泡进行了一定的研究并且取得了一些有价值的结论,但是对相关物理现象和物理机理的理解并不透彻;为了深入理解剪切稀化流体特征参数(如表面张力和液相初始黏度)对气泡非稳态水动力学的影响,笔者利用 VOF 法结合连续表面张力模型数值研究了剪切稀化流体中,表面张力和液相初始黏度对非稳态气泡水动力学特性的影响规律与影响机理。表面张力的影响用 Eo 数(表示重力与表面张力之比)表示,液相初始黏度的影响用 Ga 数(表示重力与黏性力之比)表示。

1 数值方法

1.1 物理模型

如图 1 所示,采用笛卡尔坐标系描述两相流动(液体为主相,气体为次相),将半径为 $R = 3$ mm、初始形状为球形的气泡放置在充满静止剪切稀化流体竖直槽道中的 $(0, 0, 5R)$ 位置处,气泡在浮力的作用下,作自由上浮运动。为防止气泡上浮过程受壁面影响且保证气泡能充分达到运动状态,笔者所采用的计算域尺寸为 $x \times y \times z = 10R \times 10R \times 50R$;计算域的四周和底壁面均采用滑移边界条件,顶部为压力出口;重力加速度方向沿 z 轴负方向。

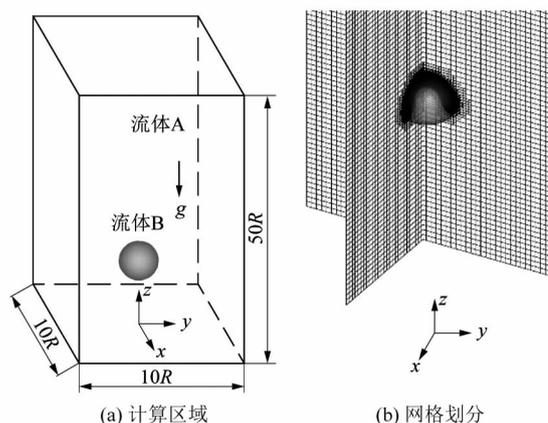


图 1 几何模型和网格划分

Figure 1 Geometric model and mesh generation

1.2 控制方程

目前的研究是基于以下假设进行的:①两相流动为非稳态层流;②气液两相互不相溶且都为不可压缩流体;③两相为恒温流体。连续方程和动量方程简化如下:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \mathbf{F} + \rho \mathbf{g}. \quad (2)$$

式中: ∇ 为哈密顿算子; p 为压力,Pa; \mathbf{u} 为速度矢量,m/s; t 为时间,s; μ 为平均黏度,Pa·s; ρ 为平均密度,kg/m³; \mathbf{F} 为表面张力引起的体积力,N; \mathbf{g} 为重力加速度,m/s²。

1.3 VOF 方法

采用 Hirt 等^[15]提出的 VOF 法对气液界面进行追

踪。VOF 法的核心是求解相函数 f 输运方程,相函数 f 的定义如式(3)所示,输运方程如式(4)所示。

$$f = \begin{cases} 1, & \text{流体 A;} \\ 0 < f < 1, & \text{流体 A 和 B;} \\ 0, & \text{流体 B.} \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0. \quad (4)$$

求解出相函数 f 后,可利用 f 计算出流体的平均密度 ρ 、平均黏度 μ 和从气泡表面向外指向的单位法向量 \mathbf{n} 。

$$\rho = \rho_A f + \rho_B (1 - f); \quad (5)$$

$$\mu = \mu_A f + \mu_B (1 - f); \quad (6)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}. \quad (7)$$

式中的下标 A 和 B 分别表示液相和气相。

表面张力是影响气泡变形的一个重要力参数,笔者采用 Brackbill 等^[16]提出的连续表面张力模型计算表面张力。该方法在计算时,将表面张力转换成体积力添加到动量方程的右边,体积力 \mathbf{F} 计算式如下:

$$\mathbf{F} = -\sigma k \delta \mathbf{n}. \quad (8)$$

式中: σ 和 δ 分别表示表面张力系数和狄拉克函数; $k = \nabla \cdot \mathbf{n}$ 是界面曲率。

求出相函数 f 和相界面上的单位法向量 \mathbf{n} 后,采用 Youngs^[17]改进的分段线性法 (PLIC) 即可进行气泡界面重构。

1.4 液相本构方程

笔者采用 Carreau 模型描述剪切稀化流体的黏度变化特性,即:

$$\mu_A = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) [1 + (\lambda \dot{\gamma})^2]^{(m-1)/2}. \quad (9)$$

式中: m 是流变指数,当 $m < 1$ 时,表示流体为剪切稀化流体; λ 是特征时间, s; 当 $\lambda = 0$ 或 $m = 1$ 时,流体为牛顿流体; μ_0 和 μ_∞ 分别表示液相的零剪切黏度和无穷剪切黏度, Pa · s。

根据文献[14], μ_∞ 通常取无限小,笔者取 $\mu_\infty = 0$, 所以式(9)可简化为:

$$\mu_A = \mu_0 [1 + (\lambda \dot{\gamma})^2]^{(m-1)/2}. \quad (10)$$

1.5 数值方法

目前计算求解的是三维瞬态过程,采用有限体积法对所求解的空间域进行离散。在确保计算精度的同

时尽可能减小计算量,采用动态自适应网格技术对气液界面局部进行网格加密,如图 1(b)所示。加密后网格尺寸是原来基础网格的 1/4,气泡离开区域的网格还原为初始网格。所求解动量方程中对流项和黏性项的离散格式分别采用二阶迎风格式和中心差分格式。对于时间域上的离散,采用隐式时间积分方案。选择 PISO 算法耦合速度和压力场。计算前,先初始化流场,然后在指定的位置放置一个初始形状为球形的气泡,开始两相流的计算。

2 结果讨论

2.1 结果无量纲处理

为了便于计算结果的对比分析,对分析部分所涉及的物理量进行了如下无量纲化处理:

$$(x^*, y^*, z^*) = (x, y, z)/R, t^* = t \sqrt{g/R}, \mathbf{u}^* = \mathbf{u}/\sqrt{gR}, \mu^* = \mu/\mu_0, p^* = p/\rho_A g R, \lambda^* = \lambda/\sqrt{R/g}. \quad (11)$$

2.2 网格大小和时间步长无关性验证

为了保证选取的网格系统和时间步长不会对计算结果产生影响,有必要对其进行无关性验证。本次验证是选择最苛刻工况的计算参数进行的 ($m = 0.3$, $\lambda^* = 5.7$, 初始 $Ga = 111.9$ 和 $Eu = 4$), 对比不同初始网格尺寸(相同时间步长下)和不同时间步长(同一网格系统下)下,气泡中心高度随时间的变化过程,如图 2 和图 3 所示。图 2 中网格 1 ~ 网格 4 分别表示单个基础网格尺寸大小为 $R/3.75$, $R/4.30$, $R/5.00$ 和 $R/6.00$ 。从图 2 可以看出,随着基础网格尺寸的减小,不同时刻下气泡中心高度逐渐趋于一致。当 $t^* < 9$ 时,4 种网格的结果差异不大;但 $t^* > 9$ 时,4 种网格的结果差异相对明显,其中网格 1 和网格 2 的差异大于网格 3 和网格 4 的差异。因此,为了保证计算的准确性,选择网格 4 作为计算网格。图 3 中 4 种时间步长对应的值分别为 5.7×10^{-3} , 2.9×10^{-3} , 1.4×10^{-3} 和 1.1×10^{-4} s。由图 3 可知,当时间步长逐渐减小至 3 和 4 时,不同时刻下气泡中心高度位置几乎一致。这表明继续减小时间步长不会对计算结果产生明显的影响。基于上面的分析,计算选用时间步长 4。

2.3 结果准确性验证

为了验证目前所使用数值方法的准确性,在相同工况下,将目前计算的气泡形状与文献[1]的 66 页中

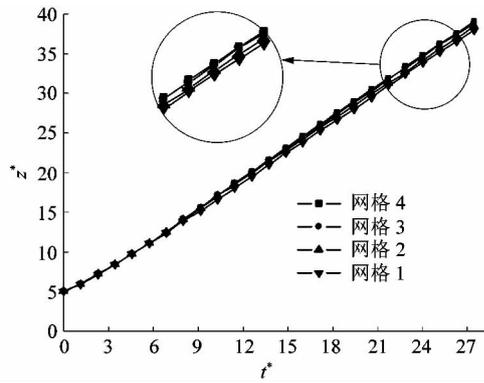


图 2 不同网格尺寸下气泡上升高度随时间变化曲线

Figure 2 Curve of bubble rising height with time under different grids

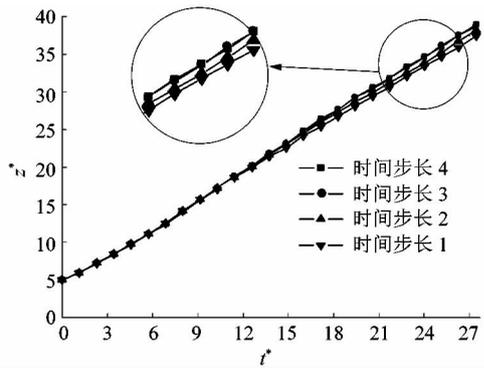


图 3 不同时间步长下气泡上升高度随时间变化曲线

Figure 3 Curve of bubble rising height with time under different time steps

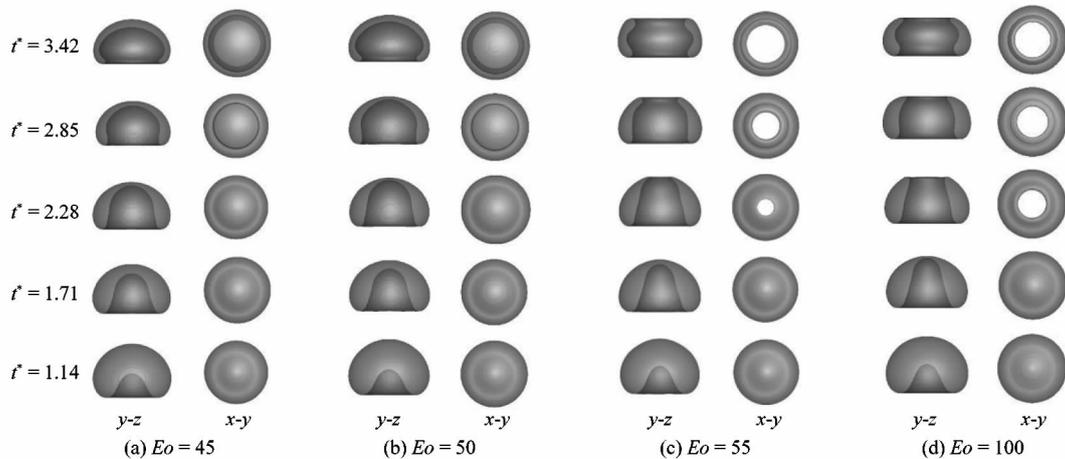


图 4 相同剪切稀化流体中 Eo 数对气泡形状的影响

Figure 4 Effect of Eo number on bubble shape in same shear-thinning fluid

实验和文献[4]中 300 页的数值结果进行了对比,如表 1 所示。从结果来看气泡稳定后的形状与文献的结果高度相似,这充分表明目前的数值方法是可靠的。莫顿数 Mo 为流体力学量纲为一的参数,描述气泡或水滴在流体或是连续相移动时的外形。

表 1 结果准确性验证

Table 1 Result accuracy verification

计算条件	实验结果	数值结果	当前计算结果
$Eo = 116,$ $Mo = 5.51$			
$Eo = 116,$ $Mo = 848.00$			

2.4 Eo 数对气泡运动特性的影响

首先为了理解表面张力对剪切稀化流体中气泡水动力学特性的影响,保持初始 Ga 数 ($Ga = 28.5$) 和剪切稀化程度 ($m = 0.3$ 和 $\lambda^* = 28.6$) 不变,通过逐渐增大 Eo 数观察表面张力对气泡水动力学特性的影响。为了便于分析,将气泡在赤道位置沿水平方向分为顶部和底部两部分。

从图 4 可以看出,对于所有的工况,随着时间的推移气泡底部都呈现出不断上凹的趋势,图中 $Ga = 28.5,$ $m = 0.3$ 和 $\lambda^* = 28.6$ 。在 $t^* \leq 2.28$ 时,气泡底部上凹主要发生在竖直方向上。当 $t^* > 2.28$ 时,趋势发生了

变化,气泡底部上凹的同时水平方向也向外膨胀,并且在膨胀初期,膨胀速度最大位置出现在气泡底部上侧。随着时间的推移,膨胀速度最大位置呈现出自上而下移动的现象,这与文献[18]报道的现象一致。当 Eo 数相对较小时(Eo 为 45 和 50),气泡没有出现中心破

碎现象,最终变形成稳定的球帽形气泡。随着 Eo 数增大至 55 和 100 时,气泡出现了中心破碎现象。并且出现中心破碎现象的气泡不能达到稳定状态,而是不断地振荡,在破碎前一刻表现出如图 5 所示的形状。

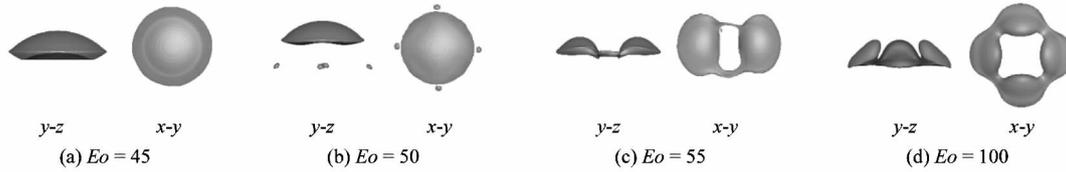


图 5 图 4 中形状稳定后或破碎前一刻气泡的形状

Figure 5 Bubble shape in figure 4 after bubble stabilization or at moment before breakage

当不考虑黏性力作用时,气泡发生中心破碎主要是因表面张力与射流强度之间相互竞争引起的^[19]。从图 6 可以看出,对于 $Ga = 28.5, m = 0.3$ 和 $\lambda^* = 28.6$ 的工况,当 $Eo = 50$ 时,表面张力效应较强,足以抵消气泡底部的射流强度,气泡没有出现中心破碎现象,而是在 $t^* = 2.28$ 之后开始向水平方向流动,这正是上文所述出现水平膨胀现象的主要原因。随着 Eo 的增大($Eo = 55$),表面张力作用减弱,不足以抵消气泡底部的射流强度,气泡底部向上流动的流体冲破气泡顶部,致使气泡出现了中心破碎现象。当 Eo 数进一步增大至 100 时,表面张力的作用进一步减弱,相同时刻下,气泡出现中心破碎的现象更加明显。由于表面张力和射流强度之间的非平衡作用,致使其形状不断振荡,不能取得稳定状态,所以呈现出破碎现象。

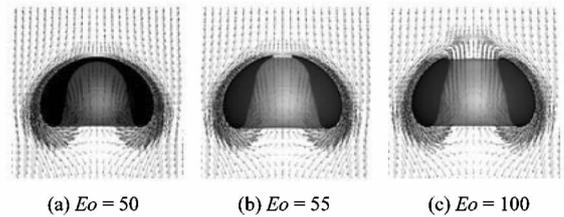


图 6 不同 Eo 数下剪切稀化流体中气泡周围速度场分布

Figure 6 Velocity field distribution around bubble in shear-thinning fluid with different Eo numbers

2.5 初始 Ga 数对气泡运动特性的影响

图 7 给出相同 Eo 数、流变指数 m 和特征时间 λ^* (其中 $Eo = 4, m = 0.3$ 和 $\lambda^* = 28.6$) 下, Ga 数对气泡形状演变过程的影响。在低 Ga ($Ga = 5.0$) 数下,初始

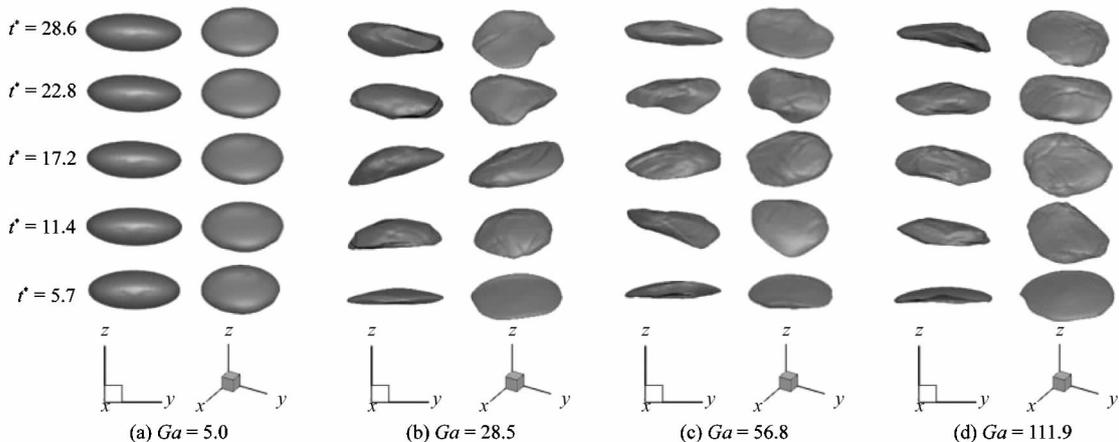


图 7 剪切稀化流体中 Ga 数对气泡形状随时间演变过程的影响

Figure 7 Effect of Ga number on evolution of bubble shape with time in shear-thinning fluid

形状为球形的气泡很快就稳定为规则的椭球形,并保持为二维特性;随后随着时间的进一步推移,气泡形状出现了朝一个方向偏转的现象,这正是气泡上浮轨迹朝着某一方向偏转的原因。随着 Ga 数的增大,气泡形状呈现出不规则变形,气泡表现出强烈的三维特性。当 Ga 数从 28.5 增至 111.9 时,随着时间的推移,气泡呈现出无规则的剧烈振荡变形,形状始终不能取得稳定状态。

为了理解气泡尾部流场分布特征,图 8 给出当 $Eu = 4, m = 0.3$ 和 $\lambda^* = 28.6$ 时, Ga 数对剪切稀化流体中气泡周围液相表观黏度的影响。当 Ga 数为 5.0 时,气泡的形状和周围液相黏度很快达到稳定状态,稳定后的表观黏度呈现出由低到高从气泡周围向外辐射的分布特征,且在气泡尾部 2 侧形成了 2 个长条状低

黏度区域。这与文献[14]第 8 页的研究结果相似。相同时刻下,气泡周围液相表观黏度在 $y-z$ 和 $x-z$ 截面上的分布几乎相同,这再次证明在低 Ga 数下气泡具有二维水动力学特征。随着 Ga 数的增大,气泡周围低黏度区域增大,尾部不稳定性变得越剧烈,三维特征越明显;而且气泡尾部液相表观黏度的分布由稳定的长条状转变为“之”字形,并伴有低黏度区域分离现象。对于 Ga 为 28.5, 56.8 和 111.9 这三个工况,气泡尾部不稳定的黏度区域会随机在一个平面上呈现出“之”字形分布,而在另一个平面上呈现出竖直分布,并伴有分离现象。值得注意的是,对于非稳态运动的气泡,很难确定不稳定黏度区域在哪个方向上会呈现出“之”字形分布或底部脱落现象。随机振荡现象是非稳态气泡呈现出三维运动的一个重要特征。

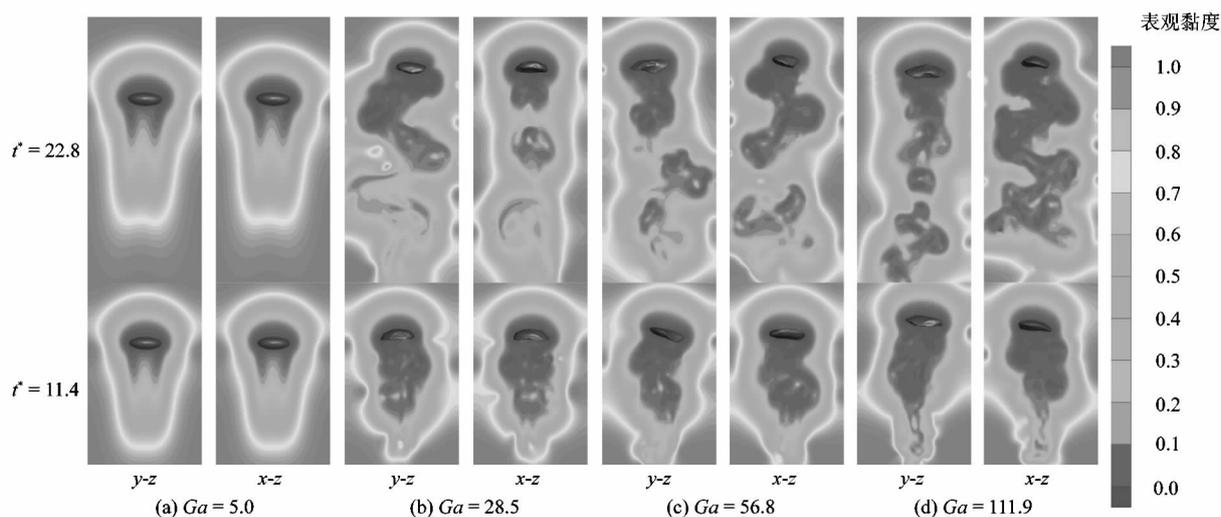


图 8 剪切稀化流体中气泡周围液相表观黏度分布

Figure 8 Distribution of apparent viscosity of liquid around bubbles in shear-thinning fluid

从图 8 可知, Ga 数越大, 气泡运动产生的剪切稀化效应越强, 气泡尾部流体的低黏度区越不稳定, 局部气泡 Ga_L ($Ga_L = \rho_A g^{1/2} d^{3/2} / \mu_L$, 其中 g 为重力加速度, d 为气泡直径, μ_L 为距气泡界面 $0.1R$ 区域流体黏度的平均值) 数越大。气泡尾部不稳定低黏度区的出现, 引发气泡尾部不稳定尾流的形成^{[14]9}。文献[20]指出, 气泡尾部不稳定的尾流必然会对气泡的上浮轨迹产生重要影响。为了验证 Ga_L 数的增大是否会引发气泡不稳定尾流的问题, 图 9 给出 $t^* = 28.5$ 时刻上述 4 个工况的 Ga_L 数和气泡运动方向 (z 方向) 涡量的等值

面云图, 其中 z 方向的涡量 $\omega_z = \pm 50 \text{ s}^{-1}$ 。从图中可以看出, 局部 Ga_L 数远大于初始 Ga 数。当 Ga_L 数较低时, 仅在气泡赤道附近出现了对称分布的涡斑, 并未出现涡脱落现象, 因此气泡并没有出现“之”字形运动。随着 Ga_L 数的增大, 气泡尾部形成一对双螺旋结构的涡, 而且逐渐出现了脱落现象; Ga_L 越大, 这种现象越明显。总而言之, 气泡上浮运动对流体产生的剪切作用, 致使气泡 Ga_L 数随液相表观黏度的降低而大幅增加; Ga_L 数越大, 气泡尾部的涡脱落现象越明显, 气泡非稳态运动越剧烈。

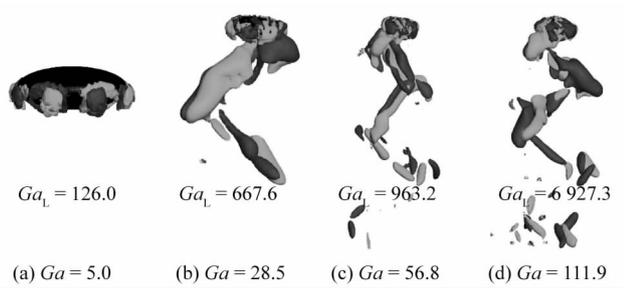


图9 工况 $Eo = 4, m = 0.3$ 和 $\lambda^* = 28.6$ 在 $t^* = 28.6$ 时气泡 Ga_L 数和尾部涡量等值面
 Figure 9 Bubble Ga_L number and iso-surfaces of vorticity at $t^* = 28.6$ for $Eo = 4, m = 0.3$ and $\lambda^* = 28.6$

3 结论

笔者利用VOF方法数值研究了 Eo 数(表面张力)和 Ga 数(液相零剪切黏度)对剪切稀化流体中非稳态气泡水动力学特性的影响,得到以下结论:

1) Ga 数和 Eo 数的增大(即表面张力和零剪切黏度的减弱)均会导致气泡非稳定运动的出现;目前的研究发现了气泡的2种非稳态运动,即形状保持对称的中心破碎气泡和形状非对称、呈现出三维特性的非稳态气泡。

2) 在相同剪切稀化效应的流体中,气泡出现中心破碎现象主要是由于表面张力和气泡底部射流之间的竞争引起的;当表面张力足以抵消气泡底部射流强度($Eo \leq 50$)时,气泡稳定为帽形气泡,否则($Eo > 50$)气泡则会出现中心破碎现象。

3) 气泡 Ga 数的增大(对应液相零剪切黏度的降低),引起气泡周围液相表观黏度大幅降低,导致局部气泡 Ga 数急剧增大,在气泡尾部出现了周期性的涡脱落现象;局部气泡 Ga 数越大,气泡尾部周期性涡脱落越厉害,气泡非稳态特征越明显。

4) 从目前的研究可以推测,提高 Ga 数和 Eo 数能够促进剪切稀化流体中气泡非稳态运动的发生,从而提高气泡周围液相的湍流强度,这对于改善和提高相间的质量和热量传递具有巨大的促进作用。

参考文献:

[1] BHAGA D,WEBER M E. Bubbles in viscous liquids; shapes, wakes and velocities[J]. Journal of Fluid Mechanics,1981,105:61-66.

[2] LI X,ZHANG P,LI J L, et al. Analysis of deformation and internal flow patterns for rising single bubbles in different liquid[J]. Chinese Journal of Chemical Engineering,2019,27(4):745-758.

[3] ISLAM M T,GANESAN P B,CHENG J, et al. Single bubble rising behaviors in Newtonian and non-Newtonian fluids with validation of empirical correlations: a computational fluid dynamics study [J]. Engineering Reports,2020,2:e12100.

[4] GUMULYA M,JOSHI J B,UTIKAR R P, et al. Bubble in viscous liquids: time dependent behavior and wake characteristic [J]. Chemical Engineering Science,2016,144:298-300.

[5] LI S B,YAN Z,LI R D, et al. Numerical simulation of single bubble rising in shear-thinning fluids by level set method [J]. Journal of Central South University,2016,23(4):1000-1006.

[6] TRIPATHI M K,SAHU K C,GOVINDARAJAN R. Dynamics of an initially spherical bubble rising in quiescent liquid [J]. Nature Communications,2015,6(1):1-9.

[7] OSHAGHI M R,SHAHSAVARI M,AFSHIN H, et al. Experimental investigation of the bubble motion and its ascension in a quiescent viscous liquid [J]. Experimental Thermal and Fluid Science,2019,103:274-285.

[8] SHARAF D M,PREMLATA A R,TRIPATHI M K, et al. Shapes and paths of an air bubble rising in quiescent liquids [J]. Physics of Fluids,2017,29(12):122104.

[9] OHTA M,IMURA T,YOSHIDA Y, et al. A computational study of the effect of initial bubble conditions on the motion of a gas bubble rising in viscous liquids [J]. International Journal of Multiphase Flow,2005,31(2):222-237.

[10] SAFFMAN P G. On the rise of small air bubbles in water [J]. Journal of Fluid Mechanics,1956,1(3):249-275.

[11] WU M M,GHARIB M. Experimental studies on the shape and path of small air bubbles rising in clean water [J]. Physics of Fluids,2002,14(7):L49-L52.

[12] XU X F,ZHANG J,LIU F X, et al. Rising behavior of single bubble in infinite stagnant non-Newtonian liquids [J]. International Journal of Multiphase Flow,2017,95:84-90.

[13] OHTA M,YOSHIDA Y,SUSSMAN M. A computational study of the dynamic motion of a bubble rising in Carreau model fluids [J]. Fluid Dynamics Research,2010,42(2):1-15.

[14] PREMLATA A R,TRIPATHI M K,KARRI B, et al. Numerical and experimental investigations of an air bubble rising in a Carreau-Yasuda shear-thinning liquid [J]. Physics of Fluids,2017,29(3):7-9.

[15] HIRT C W,NICHOLS B D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries [J]. Journal of Computational Physics,1981,39(1):201-225.