［研究·设计］

DOI:10.3969/j. issn. 1005-2895. 2023. 06. 002

基于几何代数的四面体机构自由度分析

郭进群，柴馨雪*

（浙江理工大学 机械工程学院，浙江 杭州 310018）

摘　要:针对四面体机构的多环耦合复杂结构导致的现有自由度计算方法对其进行自由度分析时不能有效地判断耦合部分的约束情况,课题组提出了一种基于几何代数的四面体机构自由度分析方法。先将整个机构进行拓扑等效,寻找机构的最短分支;通过修正分支运动空间的方式,将与分支耦合的闭环带来的约束体现在分支的运动空间中;最后通过对所有修正后的分支运动空间求交,得到输出构件的自由度解析式。结合具体算例可知:课题组提出的方法无需借助逻辑判断,可直接得到机构输出构件的自由度性质,解析式中的变量能给之后的驱动分布提供了选择方案。基于几何代数的四面体机构自由度分析方法具有一定的工程意义。

关　键　词:四面体机构;自由度计算;多环耦合;几何代数

中图分类号:TH112　　　**文献标志码**:A　　　**文章编号**:1005-2895(2023)06-0009-08

Mobility Analysis of Tetrahedral Mechanisms Based on Geometric Algebra

GUO Jinqun, CHAI Xinxue*

(School of Mechanical Engineering, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Due to the complex structure of multi-loop coupling in tetrahedral mechanisms, existing methods for calculating degrees of freedom couldnot effectively determine the constraints of the coupling part when conducting free analysis, a degree of freedom analysis method for tetrahedral mechanisms based on geometric algebra was proposed. Firstly, the topological equivalence on the entire mechanism was performed to find the shortest branch of the mechanism. By modifying the twist space of the branch, the constraints brought by the closed-loop coupling with the branch in the twist space of the branch were reflected. Finally, by intersecting all modified twist spaces, the analytical expression for the degrees of freedom of the output component was obtained. Based on specific examples, it can be seen that the proposed method does not require logical judgment and can directly obtain the degree of freedom properties of the output components of the mechanism. The variables in the analytical formula also provide a selection scheme for the subsequent drive distribution which has some engineering significance.

Keywords: tetrahedral mechanism; mobility analysis; multi-loop coupling; geometric algebra

四面体机构具有密度小、刚度高和精度高的优点，广泛应用于包装、纺织、印刷机械以及高精密机床的传动单元[1-3]。由于四面体机构相比于一般的并联机构具有更复杂的环路耦合结构,致使其在自由度、运动学等理论分析上尚未建立起一套完整的分析体系,这一定程度上限制了四面体机构的应用与发展。自由度分析作为机构设计的最基本问题之一,对后续的运动学分析、驱动分布和控制都有着重要的意义。

四面体机构属于一种多环耦合机构,迄今为止已有不少学者尝试对多环耦合机构的自由度进行计算,其中比较具有代表性的是拆分法。Dai 等[4]将 1 个耦合球状机构分解成多个 1 自由度的单元,由此计算机

收稿日期:2023-04-17;**修回日期**:2023-07-13

基金项目:国家自然科学基金资助项目(52005448);国家自然科学基金资助项目(51935010);国家自然科学基金资助项目(52205023);机械系统与振动国家重点实验室课题资助项目(MSV202314)。

第一作者简介:郭进群(1998),女,浙江长兴人,硕士研究生,主要从事多环耦合机构的理论分析。**通信作者**:柴馨雪(1988),女,内蒙古赤峰人,博士,副教授,主要研究方向为机器人、多环耦合机构和机构学等。E-mail:chaixx@ zstu. edu. cn

构的自由度。黄真等[5]将空间多环耦合机构分解成若干杆组,在叠加杆组的过程中对所有拼合机构逐一进行自由度计算。然而机构的拆分思路并未明确,单元的可计算性不能保证,试错成本高,不能作为一种普适的自由度计算方法。刘文兰[6]使用拆分法对 3RR-3RRR 机构进行自由度分析,但存在拆分后仍出现耦合闭环的情况,需要进行进一步地分析。以上研究都基于 Kong 等[7]提出的虚拟支链理论,虚拟支链已经在并联机构的自由度计算中被广泛使用。刘婧芳等[8]在这一思想的基础上提出一种将多环耦合机构等效成并联机构的自由度计算方法,并提出分支的耦合特性是由分支上的耦合构件决定的。高慧芳等[9]根据这一思路提出基于螺旋理论的分流标记法,给出了具体的分解等效原则。在分流标记法的基础上衍生出了细胞分裂法等[10-12]。但分流标记法的分支选择很多,遍历分支的过程需要人工逻辑判断,时间成本高,对于部分输出需要多次重复计算,使得计算效率不高;且该类方法依托于螺旋理论[13-14]和修正的 G-K 公式的自由度计算方法,对机构的瞬时位型依赖程度较高,计算得到的自由度性质不具有全周性;同时对一些耦合的输出自由度性质也无法进行正确地描述。特别地,在遇到具有复杂几何条件的机构时,螺旋理论也存在失效的情况。该问题同样存在于方位特征集(position and orientation characteristics,POC)[15]和李代数[16]等其他数学工具上。

基于 G_6 的几何代数框架下的并联机构自由度计算方法拥有普适、高效的计算特点[17]11。机构的自由度可由各条分支运动空间做交集得到,运用6维的高维空间,保留完整的运动空间信息,使得机构可以得到固定坐标系下输出构件的自由度解析式,从而直接得到具有全周性的输出自由度性质。课题组在此基础上,先对多环耦合机构进行分支选取,通过修正分支运动空间的方式将闭环带来的约束整合到分支中,得到实际的分支运动空间。最后对各修正的分支运动空间求交,得到输出构件的自由度解析式。

1 几何代数基础

1.1 运动螺旋的几何代数形式

螺旋理论中的螺旋是6维向量,其一般表现形式为[17]6:

$$\boldsymbol{S}=[s,r\times s+hs]=[v_1,v_2,v_3;b_1,b_2,b_3]^{\mathrm{T}}。\quad (1)$$

式中:$\boldsymbol{S}$ 为螺旋;s 为螺旋轴线的方向;r 为螺旋线上的一点;h 为螺旋的节距;v_1,v_2,v_3,b_1,b_2,b_3 为标量参数。

当 $h=0$ 时,螺旋 $\boldsymbol{S}$ 表示 1 自由度转动;$h\neq0$ 时,螺旋 $\boldsymbol{S}$ 表示 1 自由度的螺旋运动;当 $h=\infty$ 时,螺旋 $\boldsymbol{S}$ 表示一个 1 自由度平动,可以被简写成:

$$\boldsymbol{S}=[0\quad s]。\quad (2)$$

于是运动螺旋可在包含 6 维正交基底的 G_6 空间直接表示为:

$$\boldsymbol{S}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3+b_1\boldsymbol{e}_4+b_2\boldsymbol{e}_5+b_3\boldsymbol{e}_6。\quad (3)$$

式中:$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_5,\boldsymbol{e}_6$ 为 6 个正交基底。

则 1 自由度平动可简写为:

$$\boldsymbol{S}=b_1\boldsymbol{e}_4+b_2\boldsymbol{e}_5+b_3\boldsymbol{e}_6。\quad (4)$$

1.2 几何代数基底和基本运算

G_6 是 6 维几何代数,其中含有 6 个正交基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_5,\boldsymbol{e}_6\}$ 满足以下条件:

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\begin{cases}1,i=j,\\0,i\neq j;\end{cases}\quad (5)$$
$$\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j=0,\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j=-\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_i。$$

式中:“·”为内积符号,“∧”为外积符号,$\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_j$ 表示 G_6 中的任意正交基底。

几何积[18]52-60也是几何代数中的基础运算,由内积和外积 2 个部分组成,任意 2 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 的几何积记作 $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$。

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_1\wedge\boldsymbol{a}_2。\quad (6)$$

几何代数的基本元素是片积(blade)。k 个一维向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 做外积可以得到一个 k 阶片积,也叫 k-blade。

$$\boldsymbol{A}_{\langle k\rangle}=\boldsymbol{a}_1\wedge\boldsymbol{a}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{a}_k。\quad (7)$$

并集即为不同子空间共同张成空间,任意 2 个子空间不重叠的 k 阶子空间 $A_{\langle k\rangle}$ 和 l 阶子空间 $\boldsymbol{B}_{\langle l\rangle}$ 张成的空间可以直接通过两者的外积得到。

$$\boldsymbol{J}_{\langle m\rangle}=\boldsymbol{A}_{\langle k\rangle}\cup\boldsymbol{B}_{\langle l\rangle}=\boldsymbol{A}_{\langle k\rangle}\wedge\boldsymbol{B}_{\langle l\rangle}。\quad (8)$$

式中:$\boldsymbol{J}_{\langle m\rangle}$ 是一个 m 阶片积,$m=k+l$。

当 2 个子空间有重叠部分时 $m<k+l$,并保证组成 2 个子空间的所有 1 阶片积的 $\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_j$ 与 $\boldsymbol{J}_{\langle m\rangle}$ 的外积都为零。

交集即为子空间 $\boldsymbol{A}_{\langle k\rangle}$ 和子空间 $\boldsymbol{B}_{\langle l\rangle}$ 的重叠部分张成的空间为:

$$\boldsymbol{A}_{\langle k\rangle}\cap\boldsymbol{B}_{\langle l\rangle}=(\boldsymbol{A}_{\langle k\rangle}\boldsymbol{J}_{\langle m\rangle}^{-1})\cdot\boldsymbol{B}_{\langle l\rangle}。\tag{9}$$

1.3　几何代数中的坐标变换

几何代数中的旋转矩阵由转子 $\boldsymbol{R}$ 表示[18]131,子空间 $\boldsymbol{A}_{\langle k\rangle}$ 是由子空间 $\boldsymbol{B}_{\langle k\rangle}$ 经过旋转后得到,且有:

$$\boldsymbol{B}_{\langle k\rangle}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_{\langle k\rangle}\widetilde{\boldsymbol{R}}。\tag{10}$$

式中:$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$,$\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 表示 $\boldsymbol{R}$ 的逆,且 $\widetilde{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是对应旋转变换的向量。

由于移动变换只涉及移动运动,所有的移动变换都作用在 1 阶片积上,$\boldsymbol{d}$ 是由 $\boldsymbol{c}$ 经移动变换得到 1 阶片积,且:

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{T}。\tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{T}$ 是 1 阶片积。

2　四面体机构自由度计算

2.1　3RR-3RRR 四面体机构分支

3RR-3RRR 四面体单元机构共有 13 个构件和 15 个转动副。根据四面体的构型,选定机架和输出构件如图 1(a)所示。

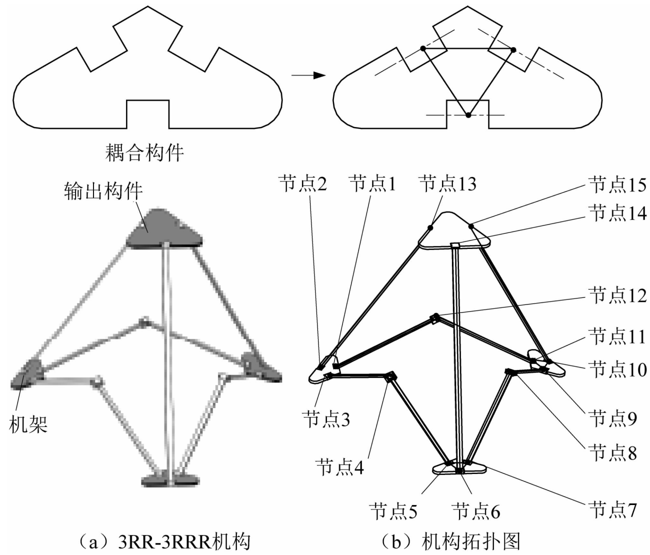


图 1　3RR-3RRR 机构等效图

Figure 1　Equivalent diagram of 3RR-3RRR mechanism

对 3RR-3RRR 机构做等效处理,将所有运动副看作节点,杆件看作是连接节点的边。耦合构件上所有节点之间都有边,可将 3RR-3RRR 机构的耦合构件做等效处理,最终得到机构的拓扑图如图 1(b)所示。拓扑图对应的邻接矩阵 $\boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}
0&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&\infty&\infty&\infty\\
\infty&0&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&\infty&\infty\\
\infty&\infty&0&1&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty\\
\infty&\infty&1&0&1&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty\\
\infty&\infty&\infty&1&0&1&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty\\
\infty&\infty&\infty&\infty&1&0&1&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&\infty\\
\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&0&1&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty\\
\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&0&1&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty\\
\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&0&1&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty\\
\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&0&1&\infty&\infty&\infty&1\\
\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&0&1&\infty&\infty&\infty\\
1&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&0&\infty&\infty&\infty\\
\infty&1&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&0&\infty&\infty\\
\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&0&\infty\\
\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&\infty&\infty&\infty&\infty&0
\end{bmatrix}。\tag{12}$$

式中:矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中第 i 行,第 j 列的元素 c_{ij} 表示节点 i 和 j 之间的联通情况,$c_{ij}=1$ 表示联通,$c_{ij}=\infty$ 表示不联通,$i=j$ 时,$c_{ij}=0$。

从计算简便的角度出发,机构的分支应尽可能短,且分支的起点与终点不同。故将固连在机架上的运动副节点 1 ~ 3 作为起点,固连在输出构件上的运动副节点 13 ~ 15 作为终点。通过邻接矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可以得到所有起点至终点的最短路径。从所有的路径中选择 3 条起点、终点不同且路径和最短的方案作为 3RR-3RRR 机构的分支,结果如表 1 所示。

表 1 3RR-3RRR 机构分支的路径及分支上的螺旋

Table 1 Paths of limbs and screws on limbs of 3RR-3RRR mechanism

分支	路径	分支上的螺旋
1	节点 1—节点 14—节点 13—节点 12—节点 17	S_{11}—S_{12}—S_{13}—S_{14}—S_{15}
2	节点 2—节点 15	S_{21}—S_{22}
3	节点 3—节点 5—节点 7—节点 8—节点 16	S_{31}—S_{32}—S_{33}—S_{34}—S_{35}

表 1 中分支 2 是独立分支，可以直接求得运动空间。分支 2 和分支 3 之间存在 1 处公共耦合闭环，需要进一步分析。

2.2 3RR-3RRR 机构几何代数中的自由度

如图 2 所示，3RR-3RRR 机构总共有 9 根杆，9 根杆连接 4 个平台，其中输出构件是等边三角形，其余耦合构件以及机架都是等腰三角形。根据四面体的形状特点选取 4 个顶点 O，P，Q 和 U，点 V 为点 U 在输出构件上的投影点。△OPQ 是一个等边三角形，向量 $\boldsymbol{VU}$ 是四面体底面法向量。与动平台直接相连的 3 根杆杆长相等记为 L_1，底部的 6 根杆记为 L_2，且有 $L_1=l$，$L_2=2l$。转动副轴线与底面平行线并不平行，将其夹角记作 θ，如图 2 中局部放大图所示。

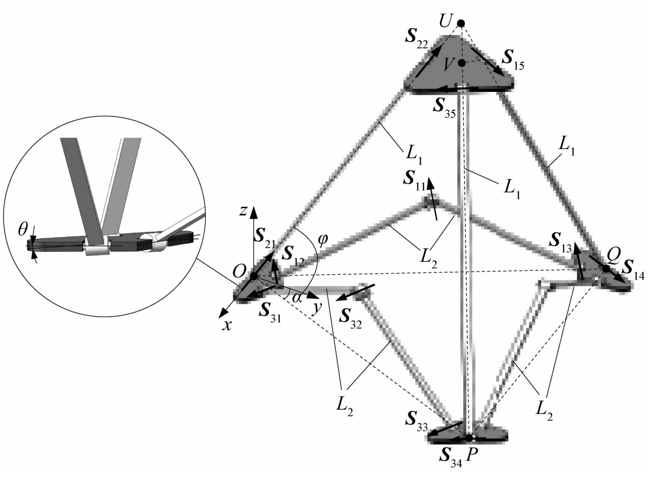


图 2 3RR-3RRR 机构分支

Figure 2 Limbs of 3RR-RRR mechanism

如图 2 所示，在 O 点直接建立固定坐标系 O-xyz，z 轴沿着四面体底面法线方向，x 轴沿四面体底面三角形的角平分线指向三角形质心，y 轴可通过右手螺旋定则得到。由此，可得到顶点坐标如表 2 所示。

2.2.1 独立分支分析

3RR-3RRR 机构只有分支 2 是独立分支，根据表 2 可得到分支 2 上的 2 个运动副：

表 2 3RR-3RRR 机构固定坐标系下的顶点坐标

Table 2 Vertex coordinates in fixed coordinate system of 3RR-3RRR mechanism

顶点	固定坐标系下的坐标
O	$(0,0,0)$
A	$((3l\cos\varphi)/2,(-\sqrt{3}l\cos\varphi)/2,0)$
B	$((3l\cos\varphi)/2,(-\sqrt{3}l\cos\varphi)/2,0)$
D	$((3l\cos\varphi)/2,0,l\sin\varphi)$
O	$(0,0,0)$

$$\boldsymbol{S}_{21}=-\boldsymbol{e}_1;$$

$$\boldsymbol{S}_{22}=-\boldsymbol{e}_1-2l\sin\varphi\boldsymbol{e}_5+2l\cos\varphi\boldsymbol{e}_6。\qquad(13)$$

式中 $\boldsymbol{S}_{ij}$ 表示第 i 条分支上的第 j 个运动副。

直接对所有运动副求并集得到分支的运动空间 $\boldsymbol{S}_2$，则有[17]7：

$$\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{S}_{21}\cup\boldsymbol{S}_{22}=\boldsymbol{S}_{21}\wedge\boldsymbol{S}_{22}=2l\sin\varphi\boldsymbol{e}_{15}-2l\cos\varphi\boldsymbol{e}_{16}。\qquad(14)$$

2.2.2 耦合分支分析[18]

耦合分支表示该分支有一部分与耦合闭环耦合，在计算耦合分支的运动空间时，要考虑闭环给耦合部分带来的约束，即修正耦合部分的运动空间，从而修正分支的运动空间。

分支 1 和分支 3 都是耦合分支，从图 2 中容易看出分支 1 和分支 3 都与图 3 所示的 7R 闭环耦合。

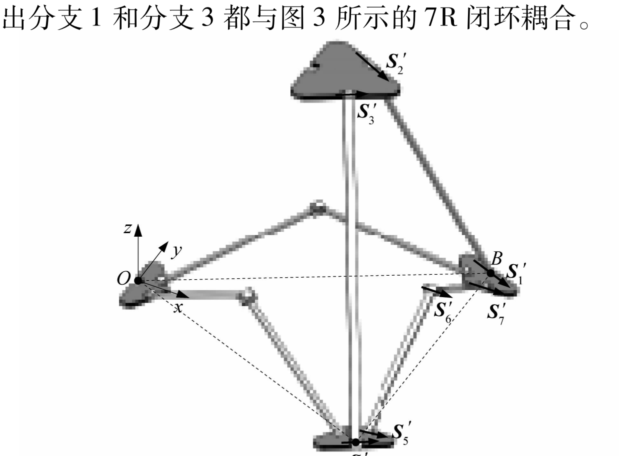


图 3 7R 闭环

Figure 3 7R closed-loop

7R 闭环中的所有运动螺旋都可以直接在 $O\text{-}xyz$ 中表示，得到闭环的 7 个运动螺旋如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{S}_1{}'=\frac{\boldsymbol{e}_1}{2}+\frac{\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2}{2}-\sqrt{3}l\cos\,\alpha\boldsymbol{e}_6;\\
&\boldsymbol{S}_2{}'=\frac{\boldsymbol{e}_1}{2}+\frac{\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2}{2}-l\sin\,\varphi\sqrt{3}\boldsymbol{e}_4+l\sin\,\varphi\boldsymbol{e}_5-l\cos\,\varphi\boldsymbol{e}_6;\\
&\boldsymbol{S}_3{}'=\frac{\boldsymbol{e}_1}{2}-\frac{\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2}{2}+l\sin\,\varphi\sqrt{3}\boldsymbol{e}_4+l\sin\,\varphi\boldsymbol{e}_5-l\cos\,\varphi\boldsymbol{e}_6;\\
&\boldsymbol{S}_4{}'=\frac{\boldsymbol{e}_1}{2}-\frac{\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2}{2}-\sqrt{3}l\cos\,\alpha\boldsymbol{e}_6;\\
&\boldsymbol{S}_5{}'=\sin\,\theta\boldsymbol{e}_3-\cos\,\theta\boldsymbol{e}_2+\sqrt{3}l\cos\,\alpha\sin\,\theta\boldsymbol{e}_4-\\
&\qquad l\cos\,\alpha\sin\,\theta\boldsymbol{e}_5-l\cos\,\alpha\cos\,\theta\boldsymbol{e}_6;\\
&\boldsymbol{S}_6{}'=\sin\,\theta\boldsymbol{e}_3-\cos\,\theta\boldsymbol{e}_2+[(\sqrt{3}l\cos\,\alpha+\\
&\qquad l\sin\,\theta\sin\,\alpha)\sin\,\theta+l\cos^2\,\theta\sin\,\alpha]\boldsymbol{e}_4;\\
&\boldsymbol{S}_7{}'=\sin\,\theta\boldsymbol{e}_3-\cos\,\theta\boldsymbol{e}_2+\sqrt{3}l\cos\,\alpha\sin\,\theta\boldsymbol{e}_4+\\
&\qquad l\cos\,\alpha\sin\,\theta\boldsymbol{e}_5+l\cos\,\alpha\cos\,\theta\boldsymbol{e}_6。
\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

式中 $\alpha=\arccos(\sqrt{3}\cos\,\varphi)$。

分支 1 只与一个 7R 闭环存在耦合，如图 4 所示。对于分支 1 耦合部分运动空间的修正可以直接在闭环中进行。将闭环看作是 2 个分支并联机构，图 4 中的黑色圆点标记表示该构件为闭环的机架，灰色圆点标记表示该构件为闭环的输出构件。闭环中的分支 1 即为耦合部分，闭环中的剩余支链即为分支 2。对这 2 条分支的运动空间求交，就可以修正分支 1 的耦合部分。

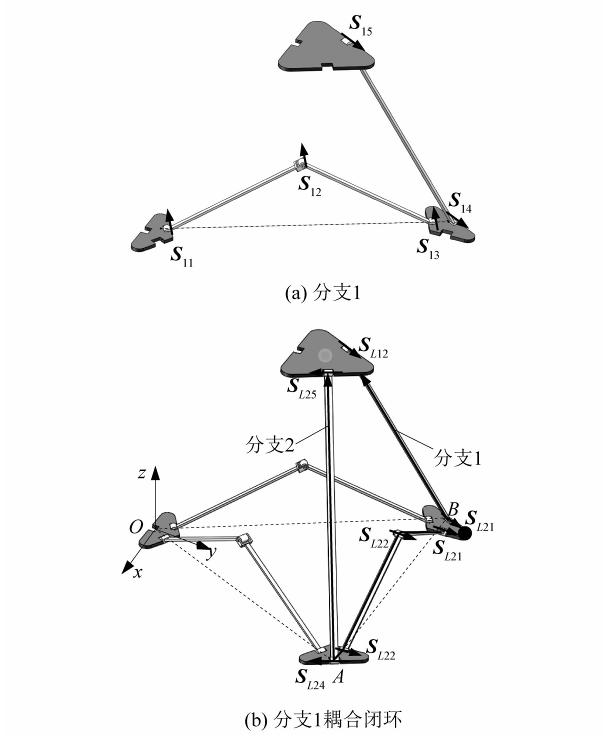
耦合闭环 1-1 中所有的运动螺旋如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{S}_{L11}=\boldsymbol{S}_1{}';\boldsymbol{S}_{L12}=\boldsymbol{S}_2{}';\\
&\boldsymbol{S}_{L21}{}'=\boldsymbol{S}_7{}';\boldsymbol{S}_{L22}=\boldsymbol{S}_6{}';\boldsymbol{S}_{L23}=\boldsymbol{S}_5{}';\boldsymbol{S}_{L24}=\boldsymbol{S}_4{}';\boldsymbol{S}_{L25}=\boldsymbol{S}_3{}'。
\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

式中：$\boldsymbol{S}_{Lij}$ 表示闭环中第 i 条分支上第 j 个运动螺旋。

闭环 1-1 中 2 分支的运动空间 $\boldsymbol{S}_{L1}$ 和 $\boldsymbol{S}_{L2}$ 分别为：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_{L1}&=\boldsymbol{S}_{L11}\cup\boldsymbol{S}_{L12}=\boldsymbol{S}_{L11}\wedge\boldsymbol{S}_{L12}=-\frac{l\sin\,\varphi\sqrt{3}\boldsymbol{e}_{14}}{2}+\\
&\frac{l\sin\,\varphi\boldsymbol{e}_{15}}{2}+\frac{(\sqrt{3}\cos\,\alpha-\cos\,\varphi)l\boldsymbol{e}_{16}}{2}-\frac{3l\sin\,\varphi\boldsymbol{e}_{24}}{2}+\frac{\sqrt{3}l\sin\,\varphi\boldsymbol{e}_{25}}{2}+\\
&\frac{(3\cos\,\alpha-\sqrt{3}\cos\,\varphi)l\boldsymbol{e}_{26}}{2}+\sqrt{3}l^2\cos\,\alpha\sin\,\varphi\boldsymbol{e}_{56}-\\
&3l^2\cos\,\alpha\sin\,\varphi\boldsymbol{e}_{46};
\end{aligned}\tag{17}$$



(a) 分支1

(b) 分支1耦合闭环

图 4　分支 1 及其耦合闭环

Figure 4　Limb 1 and closed-loop with limb 1

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_{L2}=&\boldsymbol{S}_{L21}\cup\boldsymbol{S}_{L22}\cup\boldsymbol{S}_{L23}\cup\boldsymbol{S}_{L24}\cup\boldsymbol{S}_{L25}=\\
&\boldsymbol{S}_{L21}\wedge\boldsymbol{S}_{L22}\wedge\boldsymbol{S}_{L23}\wedge\boldsymbol{S}_{L24}\wedge\boldsymbol{S}_{L25}=\\
&(\cos\,\theta\sin\,\varphi-\sqrt{3}\sin\,\theta\cos\,\alpha+\\
&\cos\,\varphi\sin\,\theta)\sin\,\alpha\cos\,\alpha\cos\,\theta l^3\boldsymbol{e}_{12456}-\\
&\sin\,\theta\sin\,\alpha\cos\,\alpha(\cos\,\theta\sin\,\varphi+\cos\,\varphi\sin\,\theta-\\
&\sqrt{3}\sin\,\theta\cos\,\alpha)l^3\boldsymbol{e}_{13456}+l^3[\sqrt{3}(\cos\,\varphi\sin\,\theta+\\
&\cos\,\theta\sin\,\varphi)-3\cos\,\alpha\sin\,\theta]\sin\,\theta\sin\,\alpha\cos\,\alpha\boldsymbol{e}_{23456}。
\end{aligned}\tag{18}$$

对闭环中 2 分支的运动空间求交，得到分支 1 修正后的耦合部分的运动空间 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}11}$ 为：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}11}=&\boldsymbol{S}_{L1}\cap\boldsymbol{S}_{L2}=(\boldsymbol{S}_{L1}\boldsymbol{J}_2^{-1})\cdot\boldsymbol{S}_{L2}=\\
&c_1[3\cos\,\alpha\sin\,\varphi\sin\,\theta-\sqrt{3}(\cos\,\theta\sin^2\,\varphi+\\
&\sin\,\varphi\cos\,\varphi\sin\,\theta)]\boldsymbol{e}_4-(\cos\,\theta\cos^2\,\varphi-\\
&\sin\,\varphi\cos\,\varphi\sin\,\theta+\sqrt{3}\sin\,\varphi\sin\,\theta\cos\,\alpha+\\
&\cos\,\theta)\boldsymbol{e}_5+(\sqrt{3}\sin\,\varphi\cos\,\theta\cos\,\alpha-\\
&3\sin\,\theta\cos^2\,\alpha+2\sqrt{3}\sin\,\theta\cos\,\alpha\cos\,\varphi-\\
&\sin\,\varphi\cos\,\theta\cos\,\varphi-\sin\,\theta\cos^2\,\varphi)\boldsymbol{e}_6。
\end{aligned}\tag{19}$$

式中系数 $c_1=\sqrt{3}l^4\sin\,\theta\cos\,\alpha\sin\,\alpha$。

分支 1 其余运动螺旋如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{S}_{L1}=-\frac{\sqrt{3}\cos\theta\boldsymbol{e}_1}{2}-\frac{\cos\theta\boldsymbol{e}_2}{2}-\sin\theta\boldsymbol{e}_3;\\
&\boldsymbol{S}_{L2}=-\frac{\sqrt{3}\cos\theta\boldsymbol{e}_1}{2}-\frac{\cos\theta\boldsymbol{e}_2}{2}-\sin\theta\boldsymbol{e}_3+\\
&\quad\frac{(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha\sin\theta)l\boldsymbol{e}_4}{2}-\frac{(\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha\sin\theta)l\boldsymbol{e}_5}{2}+\\
&\quad l\cos\alpha\cos\theta\boldsymbol{e}_6;\\
&\boldsymbol{S}_{L3}=-\frac{\sqrt{3}\cos\theta\boldsymbol{e}_1}{2}-\frac{\cos\theta\boldsymbol{e}_2}{2}-\sin\theta\boldsymbol{e}_3-\\
&\quad\sqrt{3}l\cos\alpha\sin\theta\boldsymbol{e}_4-l\cos\alpha\cos\theta\boldsymbol{e}_5+2l\cos\alpha\cos\theta\boldsymbol{e}_6。
\end{aligned}\right\}
\tag{20}
$$

可得修正后的分支 1 的运动空间：

$$
\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{S}_{11}\cup\boldsymbol{S}_{12}\cup\boldsymbol{S}_{13}\cup\boldsymbol{S}_{\mathrm{p}11}=\boldsymbol{S}_{11}\wedge\boldsymbol{S}_{12}\wedge\boldsymbol{S}_{13}\wedge\boldsymbol{S}_{\mathrm{p}11}=c_2(c_{11}\boldsymbol{e}_{1456}+c_{12}\boldsymbol{e}_{2456}+c_{13}\boldsymbol{e}_{3456})。\tag{21}
$$

式中：$\boldsymbol{e}_{1456}$，$\boldsymbol{e}_{2456}$，$\boldsymbol{e}_{3456}$ 为 4 阶片积；c_2，c_{11}，c_{12} 和 c_{13} 为系数，且有

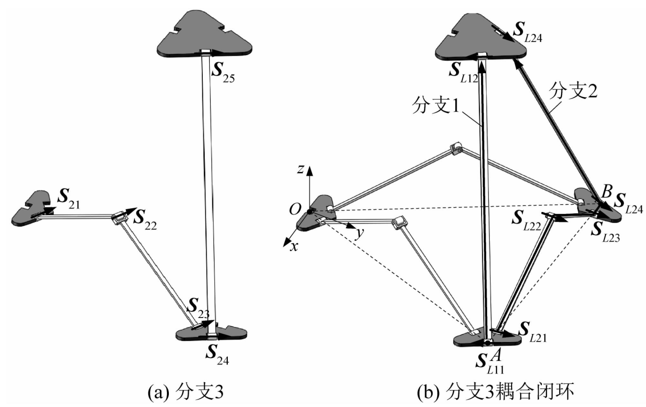
$$
c_2=\sqrt{3}l^2\sin\alpha\cos\alpha\cos^3\theta\cos^2\varphi,
$$

$$
c_{11}=\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha}{\cos^2\theta\cos\varphi}-\frac{3\cos^2\alpha}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}-\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha}{\cos\varphi}-\frac{2\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta\cos\varphi}+2-\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{1}{\cos^2\varphi}+\frac{3\cos^2\alpha}{\cos^2\varphi}+\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta\cos^2\varphi},
$$

$$
c_{12}=\frac{2\cos\alpha}{\cos^2\theta\cos\varphi}+\frac{\sqrt{3}\cos^2\alpha}{\cos^2\varphi}+\frac{\sqrt{3}\cos^2\alpha}{\cos^2\varphi}-\frac{\sqrt{3}\cos^2\alpha}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}+\frac{2\cos\alpha\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta\cos^2\varphi}-\frac{2\sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi}{3\cos\theta\cos\varphi}+\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3\cos^2\theta}-\frac{\sqrt{3}}{3\cos^2\varphi}-\frac{2\cos\alpha}{\cos\varphi},
$$

$$
c_{13}=\frac{4\sqrt{3}\sin\theta}{3\cos\theta}-\frac{4\cos\alpha\sin\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{2\sqrt{3}\sin\theta}{3\cos^3\theta}+\frac{4\sqrt{3}\sin\varphi}{3\cos\varphi}-\frac{4\cos\alpha\sin\theta}{\cos\theta\cos\varphi}-\frac{4\sqrt{3}\sin\varphi}{3\cos^2\theta\cos\varphi}-\frac{2\sqrt{3}\sin\theta}{3\cos\theta\cos^2\varphi}-\frac{2\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\theta}{\cos^3\theta\cos^2\varphi}+\frac{4\cos\alpha\sin\theta}{\cos^3\theta\cos\varphi}+\frac{2\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\theta}{\cos\theta\cos^2\varphi}+\frac{4\cos\alpha\sin\varphi}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}。
$$

分支 3 与分支 1 关于 O-yz 平面对称，也只与 1 个 7R 闭环耦合，如图 5 所示。



(a) 分支3 (b) 分支3耦合闭环

图 5 分支 3 及分支 3 的耦合闭环

Figure 5 Limb 3 and closed-loop with limb 3

闭环 3-1 中所有的运动螺旋如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{S}_{L11}=\boldsymbol{S}_4{}',\boldsymbol{S}_{L12}=\boldsymbol{S}_3{}';\\
&\boldsymbol{S}_{L21}=\boldsymbol{S}_5{}',\boldsymbol{S}_{L22}=\boldsymbol{S}_6{}',\boldsymbol{S}_{L23}=\boldsymbol{S}_7{}',\boldsymbol{S}_{L24}=\boldsymbol{S}_1{}',\boldsymbol{S}_{L25}=\boldsymbol{S}_2{}'。
\end{aligned}\right\}
\tag{22}
$$

容易看出闭环 3-1 和闭环 1-1 关于 O-yz 平面对称，可得到修正后的分支 3 耦合部分的运动空间 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}31}$ 为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}31}=\;&\boldsymbol{S}_{L1}\cap\boldsymbol{S}_{L2}=(\boldsymbol{S}_{L1}\boldsymbol{J}_2^{-1})\cdot\boldsymbol{S}_{L2}=\\
&c_1\{[3\cos\alpha\sin\varphi\sin\theta-\sqrt{3}(\cos\theta\sin^2\varphi+\\
&\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta)]\boldsymbol{e}_4-(\cos\theta\cos^2\varphi+\\
&\sqrt{3}\sin\varphi\sin\theta\cos\alpha-\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta-\\
&\cos\theta)\boldsymbol{e}_5+(2\sqrt{3}\sin\theta\cos\alpha\cos\varphi+\\
&\sqrt{3}\sin\varphi\cos\theta\cos\alpha-3\sin\theta\cos^2\alpha-\\
&\sin\theta\cos^2\varphi-\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{e}_6\}。
\end{aligned}
\tag{23}
$$

分支 3 其余运动螺旋如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{S}_{31}=\frac{\sqrt{3}\cos\theta\boldsymbol{e}_1}{2}-\frac{\cos\theta\boldsymbol{e}_2}{2}-\sin\theta\boldsymbol{e}_3;\\
&\boldsymbol{S}_{32}=\frac{\sqrt{3}\cos\theta\boldsymbol{e}_1}{2}-\frac{\cos\theta\boldsymbol{e}_2}{2}-\sin\theta\boldsymbol{e}_3+\\
&\quad\frac{(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha\sin\theta)l\boldsymbol{e}_4}{2}+\\
&\quad\frac{(\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha\sin\theta)l\boldsymbol{e}_5}{2}-l\cos\alpha\cos\theta\boldsymbol{e}_6;\\
&\boldsymbol{S}_{33}=\frac{\sqrt{3}\cos\theta\boldsymbol{e}_1}{2}-\frac{\cos\theta\boldsymbol{e}_2}{2}-\sin\theta\boldsymbol{e}_3-\\
&\quad\sqrt{3}l\cos\alpha\sin\theta\boldsymbol{e}_4+l\cos\alpha\cos\theta\boldsymbol{e}_5-\\
&\quad 2l\cos\alpha\cos\theta\boldsymbol{e}_6。
\end{aligned}\right\}
\tag{24}
$$

可得到分支 3 的修正运动空间 $\boldsymbol{S}_3$ 为：

$$\boldsymbol{S}_3=\boldsymbol{S}_{31}\cup\boldsymbol{S}_{32}\cup\boldsymbol{S}_{33}\cup\boldsymbol{S}_{P31}=\mathrm{S}_{31}\wedge\mathrm{S}_{32}\wedge\mathrm{S}_{33}\wedge\mathrm{S}_{P31}=c_2(c_{21}\boldsymbol{e}_{1456}+c_{22}\boldsymbol{e}_{2456}+c_{23}\boldsymbol{e}_{3456})。\tag{25}$$

式中：c_{21}，c_{22}，c_{23} 为系数，且有

$$c_{21}=2-\frac{3\cos^2\alpha}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}-\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha}{\cos\varphi}-\frac{2\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta\cos\varphi}+\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha}{\cos^2\theta\cos\varphi}-\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{1}{\cos^2\varphi}+\frac{3\cos^2\alpha}{\cos^2\varphi}+\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta\cos^2\varphi},$$

$$c_{22}=\frac{2\sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi}{3\cos\theta\cos\varphi}-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2\cos\alpha\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta\cos^2\varphi}+\frac{\sqrt{3}\cos^2\alpha}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}-\frac{2\cos\alpha}{\cos^2\theta\cos\varphi}-\frac{\sqrt{3}\cos^2\alpha}{\cos^2\varphi}+\frac{\sqrt{3}}{3\cos^2\theta}+\frac{\sqrt{3}}{3\cos^2\varphi}+\frac{2\cos\alpha}{\cos\varphi},$$

$$c_{23}=\frac{2\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\theta}{\cos^3\theta\cos^2\varphi}-\frac{2\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\theta}{\cos\theta\cos^2\varphi}+\frac{4\cos\alpha\sin\theta}{\cos\theta\cos\varphi}+\frac{4\sqrt{3}\sin\varphi}{3\cos^2\theta\cos\varphi}+\frac{2\sqrt{3}\sin\theta}{3\cos\theta\cos^2\varphi}-\frac{4\cos\alpha\sin\varphi}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}-\frac{4\sqrt{3}\sin\varphi}{3\cos\varphi}+\frac{2\sqrt{3}\sin\theta}{3\cos^3\theta}+\frac{4\cos\alpha\sin\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{4\sqrt{3}\sin\theta}{3\cos\theta}。$$

2.2.3　输出构件自由度分析

对 3 个分支修正后的运动空间求交集，可得到输出构件的运动解析式：

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{output}}=\boldsymbol{S}_1\cap\boldsymbol{S}_2\cap\boldsymbol{S}_3=[(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{J}_3^{-1})\cdot\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{J}_4^{-1}]\cdot\boldsymbol{S}_2=2c_3l(\sin\varphi\boldsymbol{e}_5-\cos\varphi\boldsymbol{e}_6)。\tag{26}$$

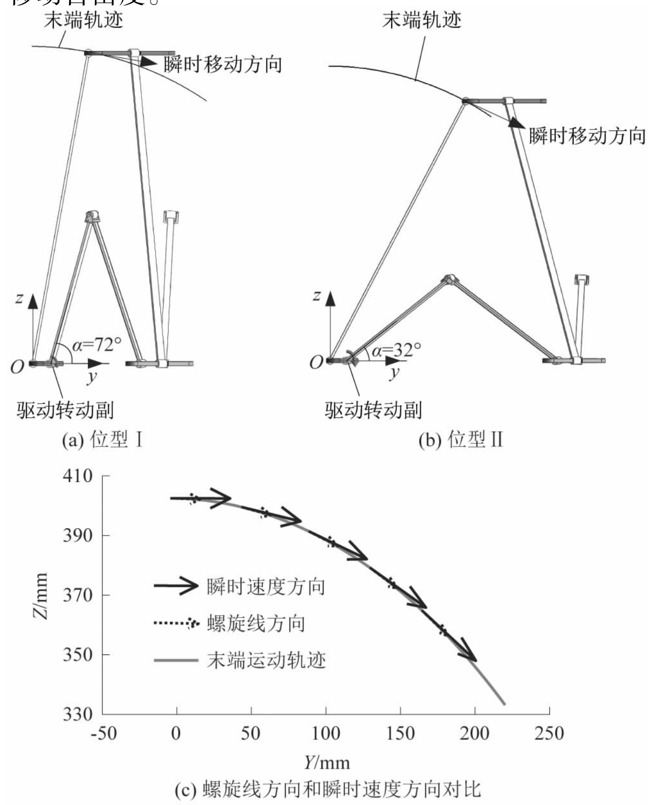
式中：$\boldsymbol{J}_3=c_3\boldsymbol{e}_{1456}$；

$$c_3=(\cos^2\theta-\frac{4}{3})(\sqrt{3}((\cos^6\theta(\frac{32}{27}\cos^6\varphi+\frac{24}{27}(15\cos^2\alpha-2)\cos^4\varphi+\frac{18}{27}\cos^2\varphi(15\cos^4\alpha-20\cos^4\alpha+1)+\cos^6\theta-5\cos^4\alpha+\frac{5}{3}\cos^2\alpha-\frac{1}{27})-10\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\cos^5\theta(\frac{16}{135}\cos^4\varphi+\frac{4}{3}\cos^2\varphi(\cos^2\alpha-\frac{4}{45})+\cos^4\alpha-\frac{2}{3}\cos^2\alpha+\frac{1}{45})+\cos^4\theta(\frac{20}{3}\cos^4\varphi(\frac{1}{3}-4\cos^2\alpha)-\frac{16}{9}\cos^6\varphi-(25\cos^4\alpha-\frac{70}{3}\cos^2\alpha+\frac{5}{9})\cos^2\varphi-3\cos^6\alpha+10\cos^4\alpha-\frac{5}{3}\cos^2\alpha)-10\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\cos\theta(\cos^4\alpha+\frac{2}{3}\cos^2\alpha\cos^2\varphi+\frac{\cos^4\varphi}{45}-5(\cos^4\alpha\cos^2\varphi-\frac{5}{3}\cos^2\alpha\cos^4\varphi-\frac{\cos^6\varphi}{27}-\cos^6\alpha)-\frac{2}{3}\cos\alpha\cos\varphi\cos^6\theta(9\cos^4\alpha+40\cos^2\alpha\cos^2\varphi+16\cos^4\varphi-30\cos^2\alpha-20\cos^2\varphi+5)-\frac{\sin\varphi\sin\theta\cos^5\theta}{9}(16\cos^4\varphi+4\cos^2\varphi(10\cos^2\alpha-3)+9\cos^4\alpha-10\cos^2\alpha+1))。$$

根据式(26)可得到最后的输出结果 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{output}}$ 是一个 1 阶片积，且只包含 $\boldsymbol{e}_5$ 和 $\boldsymbol{e}_6$，可以知道该输出构件对于机架具有 O-yz 平面内的 1 个移动自由度。

2.3　SolidWorks 建模验证

对 3RR-3RRR 机构进行三维建模，取 $l=100$ mm，$\theta=3°$。由于机构具有 1 个自由度，选取参数 α 作为驱动变量，$\alpha\in(0,90°)$，当 $\alpha=72°$（位型Ⅰ）和 $\alpha=32°$（位型Ⅱ）时可以得到输出构件的末端轨迹如图 6(a)和(b)所示，可以看出输出构件姿态不变，证明只存在移动自由度。



(a) 位型Ⅰ　(b) 位型Ⅱ

(c) 螺旋线方向和瞬时速度方向对比

图 6　3RR-3RRR 机构自由度验证

Figure 6　Verification of mobility of 3RR-3RRR mechanism

将 SolidWorks 输出的轨迹和瞬时速度导入 MATLAB 中,得到末端轨迹以及瞬时速度与螺旋线的方向如图 6(c)所示。由图 6(c)可以看出末端轨迹同一点下的瞬时速度方向和螺旋线的方向基本一致,可以验证 3RR-3RRR 机构输出 1 自由度平动,同时证明了输出构件运动解析式式(26)的正确性。

3 结语

针对四面体机构具有复杂耦合结构的特点,课题组提出了一种高效普适的基于几何代数的四面体机构自由度计算方法,并对具体的四面体机构 3RR-3RRR 机构进行自由度分析,通过三维建模仿真验证输出自由度解析式的正确性。该方法通过拓扑等效的方式从耦合运动链中选取简短分支,将闭环带来的约束体现在修正耦合分支的运动空间上,绕开了以往等效替代的思路,减少不必要的逻辑推理。耦合部分运动空间的修正可直接在闭环坐标系下完成,再将修正后的耦合部分运动空间通过几何代数中的坐标变换转化到全局坐标系下,在一定程度上简化了计算流程。在几何代数框架下,通过分支上求并、分支间求交的方式可直接求得末端输出构件在全局坐标系下的自由度解析式。输出解析式有助于四面体机构之后驱动选取和驱动分布优化的相关工作,但关于四面体机构的性能评价指标体系尚不完善,后续可以在此基础上,建立相关的基于几何代数的四面体机构性能评价指标体系,从而实现驱动分布的优化。

参考文献:

[1] 尤晶晶,李成刚,吴洪涛. 基于四面体构型的冗余并联机构的运动学分析[J]. 中国机械工程,2013,24(8):1097-1101.

[2] 郭金伟,许允斗,张国兴,等. 四面体式折展机械臂设计与分析[J]. 农业机械学报,2020,51(9):384-389.

[3] 任露洋,张淑杰,蒋骏,等. 可翻滚移动空间四面体机构的运动学分析[J]. 计算机辅助工程,2016,25(2):57-60.

[4] DAI J S, LI D L, ZHANG Q X, et al. Mobility analysis of a complex structured ball based on mechanism decomposition and equivalent screw system analysis[J]. Mechanism & Machine Theory, 2004, 39(4):445-458.

[5] 黄真,刘婧芳,李艳文. 论机构自由度:寻找了 150 年的自由度通用公式[M]. 北京:科学出版社, 2011:262-289.

[6] 刘文兰. 空间多闭环过约束机构受力机理分析[D]. 秦皇岛:燕山大学,2018:16-32.

[7] KONG X W, GOSSELIN C M. Type synthesis of 3-DOF PPR-equivalent parallel manipulators based on screw theory and the concept of virtual chain[J]. Journal of Mechanical Design, 2005, 127(6):1113-1121.

[8] 刘婧芳,黄晓欧,余跃庆,等. 多环耦合机构末端件自由度计算的等效法[J]. 机械工程学报,2014,50(23):13-19.

[9] 高慧芳,刘婧芳,黄晓欧. 基于独立运动分流标记法的多环耦合机构自由度分析方法[J]. 北京工业大学学报,2015,41(11):1658-1664.

[10] CAI J G, DENG X W, FENG J. Mobility analysis of planar radially foldable bar structures[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2015, 229(4):694-702.

[11] CAO W A, DING H F, CHENG Z M, et al. Mobility analysis and structural synthesis of a class of spatial mechanisms with coupling chains[J]. Robotica, 2016, 34(11):2467-2485.

[12] LI C Y, GUO H W, TANG D W, et al. Cell division method for mobility analysis of multi-loop mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 141:67-94.

[13] SANCHEZ-GARCIA A J, RICO J M, CERVANTES-SANCHEZ J J, et al. A mobility determination method for parallel platforms based on the Lie algebra of SE(3) and its subspaces[J]. Journal of Mechanisms and Robotics: Transactions of the ASME, 2021, 13(3):1-11.

[14] MARTINEZ J M R, DUFFY J. Orthogonal spaces and screw systems[J]. Mechanism and Machine Theory, 1992, 27(4):451-458.

[15] 廖明,刘安心,沈惠平,等. 并联机构方位特征集的符号推导方法[J]. 农业机械学报,2016,47(3):10.

[16] RICO J M, GALLARDO J, RAVANI B. Lie algebra and the mobility of kinematic chains[J]. Journal of Robotic Systems, 2003, 20(8):477-499.

[17] XIANG J N, CHAI X X, LI Q C. Mobility analysis of limited-degrees-of-freedom parallel mechanisms in the framework of geometric algebra[J]. Journal of Mechanisms and Robotics: Transactions of the ASME, 2016, 8(4):041005.1-11.

[18] PERWASS C, EDELSBRUNNER H, KOBBELT L, et al. Geometric algebra with applications in engineering[M]. Berlin: Springer, 2009:51-133.

[19] 倪仕全,田大鹏. 3-PRS 并联机构的动力学惯量耦合特性分析[J]. 机电工程,2021,38(7):815-821.