

[研究·设计]

DOI:10.3969/j.issn.1005-2895.2016.03.008

# 小线段 S 型加减速方式高速衔接算法

叶百胜, 张立强

(上海工程技术大学 机械工程学院, 上海 201620)

**摘要:**针对连续小线段拐角处衔接速度受夹角影响,导致过渡速度低且易引起机床振动等问题,研究了利用圆弧光滑连续小线段建立多周期匀速衔接数学模型,提出通过转接的几何约束和运动约束以及转接参数的计算,来实现多周期匀速衔接高速插补的方法。同时采用离散 S 型加减速规划实现加工速度和加速度的连续。通过仿真验证了该方法的有效性和实用性。该方法在满足加工精度的前提下,使数控机床的柔性提高,降低了机床的振动。

**关键词:**数控机床;连续小线段插补;多周期衔接;S 型加减速规划

中图分类号:O241.5;TP391 文献标志码:A 文章编号:1005-2895(2016)03-0034-05

## S-Shape Acceleration and Deceleration for High-Speed Linking Algorithm of Small Blocks

YE Baisheng, ZHANG Liqiang

(School of Mechanical Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620)

**Abstract:** Aiming at the corner connection speed of continuous small blocks caused by their angle influences, the speed of transition is low and easy to cause vibration of machine tool. Research on the mathematical model of constant-speed linking of multiple periods is established by using the arc to smooth continuous small blocks, combined with the transition's geometrical constraint, motion constraint, parameter calculation, the theory is to realize the method of high-speed interpolation of constant-speed linking of multiple periods. Using S-shape acceleration and deceleration control is to achieve continuity of velocity and acceleration. The result reveals the effectiveness and practicability of the proposed method. Under the precondition of satisfying the machining accuracy, the method improves the flexibility of CNC and reduces the vibration.

**Key words:** computer numerical control (CNC); continuous small blocks interpolation; multi-period linking; S-shape acceleration and deceleration

连续小线段插补是数控机床加工的主要手段,若以各段小线段为单位直接进行加减速会造成伺服电机的频繁加减速,导致加工工件表面质量下降而且耗时较多。因此在保证加工精度的前提下,提高连续微小线段加工速度是中高档数控系统中关键的问题。同时使用传统的梯形加减速方式规划,存在加速度不连续的问题,易造成机床的振动,从而影响机床加工的质量。传统的连续小线段插补方法(每小线段的首末端速度降为零)存在加工效率极低,不适用于高效的加工场合的不足,因此,为提高连续小线段的拐角通过速

度,文献[1]采用小线段拐角处等速率过渡插补方法,该方法虽然改善了小线段速度连续插补控制,但是在假设连续小线段之间的夹角很小的情况且拐角过渡速度也较小的情况下,其拐角误差控制才可行。而实际情况是连续小线段之间的夹角未必都很小,小线段之间较大夹角出现也是有可能的,因此实际使用中有一定的限制。文献[2]采用拐角圆弧过渡方式时加工速度有所提高,但存在圆弧转接误差和圆弧插补时产生的弓高误差,两者配置关系比较复杂。目前,连续小线段之间样条过渡插补是数控插补控制的研究重点,文

收稿日期:2015-10-23;修回日期:2015-12-24

基金项目:上海市教委科研创新项目(13YZ108)。

作者简介:叶百胜(1988),男,江苏盱眙人,硕士研究生,主要研究方向为数控系统、CAD/CAM。E-mail:baishengyeah@163.com

献[3-4]分别采用 B-spline 和 Bézier 过渡,然而样条插补参数计算复杂,在实际使用过程中还要进行一些简化,对处理器运算能力要求较高。对于圆弧过渡和样条过渡时都产生弓高误差,同时采用速度规划时和前瞻规划时也带来计算困难,针对该问题目前没有算法达到高效的途径。

基于以上分析,本文提出一种针对连续小线段拐角多周期匀速衔接的插补算法。该算法通过在拐角处插入过渡圆弧限制误差带范围,其次依据机床的运动学和动力学特性约束求出最佳过渡速率,同时为了保证速度和加速度的连续,避免由于加速度突变引起的机床振动,提出采用离散 S 型加减速方式进行速度规划,提高加工效率和加工质量。

## 1 速度衔接插补控制算法

### 1.1 衔接误差和过渡圆弧参数计算

为了限制连续小线段拐角处过渡时转接误差,引入了在小线段之间插入相切的圆弧形成误差带。如图 1 所示,加入圆弧后应当保证拐角精度在最大允许误差  $|q_i q| = e$  之内。

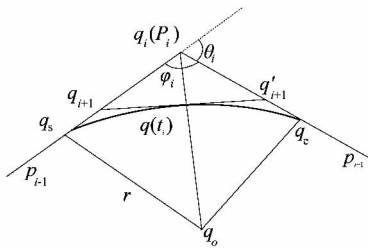


图 1 小线段衔接示意图

Figure 1 Transition model of small linear segment

两相邻的连续小线段,第  $i$  段线段  $P_{i-1}P_i$  长度为  $l_i$ ,第  $i+1$  段线段  $P_iP_{i+1}$  长度为  $l_{i+1}$  和两小线段转角为  $\theta_i$ ,则有  $\Phi_i = \pi - \theta_i$ 。求过渡圆弧半径,则有

$$r = \frac{e \cos(\theta_i/2)}{1 - \cos(\theta_i/2)} \quad (1)$$

过渡线段  $|q_s q_i| = |q_i q_e| = d_i, d_i = r \tan(\theta_i/2)$ 。

如果  $d_i > l_i$  或  $d_i > l_{i+1}$ ,同时考虑到第  $i$  段与上一段和第  $i+1$  段与下一段有足够的衔接长度,此时  $d_i > l_i/2$  或  $d_i > l_{i+1}/2$ ,这里取第  $i$  段和第  $i+1$  段的一半的最小值为过渡距离,则有  $d_i = \min(l_i/2, l_{i+1}/2)$ 。

空间小线段  $P_{i-1}P_i$  和  $P_iP_{i+1}$  确定圆弧半径后,需要计算圆弧的插补起点  $q_s$  和终点  $q_e$  坐标。圆弧起点  $q_s$  和终点  $q_e$  分别是线段  $P_{i-1}P_i$  和线段  $P_iP_{i+1}$  的内分点,则有

$$\left. \begin{aligned} q_s &= \frac{d_i P_{i-1} + (l_i - d_i) P_i}{l_i}, \\ q_e &= \frac{(l_{i+1} - d_i) P_i + d_i P_{i+1}}{l_{i+1}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

### 1.2 圆弧过渡插补计算

通常情况下,曲线过渡插补计算较直线插补计算复杂,同时进行速度规划时更加大了计算的难度,但曲线过渡插补可提高小线段转接的光滑性,增加过渡效率和运动的平稳性。针对这种矛盾,寻找一个新的方法,既能降低插补难度又能达到插补过渡曲线的目的。图 1 所示,在线段  $P_{i-1}P_i$  和线段  $P_iP_{i+1}$  中分别找到  $q_{i+1}$  和  $q'_{i+1}$  点,且  $q_{i+1}q'_{i+1}$  直线与圆弧相切于  $t_i$ ,使得直线段  $q_s q_{i+1}, q_{i+1} q'_{i+1}, q'_{i+1} q_e$  与圆弧  $q_s q_e$  围成的面积最小,可认为 3 个线段是逼近圆弧的最佳线段。也就是求  $\Delta q_{i+1} q_i q'_{i+1}$  的面积  $S$  最大,则有优化函数

$$S = \frac{1}{2} \sin(\Phi_i) |q_i q_{i+1}| |q_i q'_{i+1}| \quad (3)$$

同时由图 1 几何关系知,要满足的几何约束条件为

$$\begin{aligned} r(|q_i q_{i+1}| + |q_i q'_{i+1}| - d_i) - \frac{1}{2} \sin(\theta_i) |q_i q_{i+1}| \\ |q_i q'_{i+1}| = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

构造拉格朗日乘数函数见公式(5),  $\lambda$  为长度参数。

$$f = \frac{1}{2} \sin(\Phi_i) |q_i q_{i+1}| |q_i q'_{i+1}| + \lambda [r(|q_i q_{i+1}| + |q_i q'_{i+1}| - d_i) - \frac{1}{2} \sin(\theta_i) |q_i q_{i+1}| |q_i q'_{i+1}|] \quad (5)$$

对式(5)函数变量求偏导,得方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{df}{d|q_i q_{i+1}|} &= \frac{1}{2} (\sin(\Phi_i) - \lambda \sin(\theta_i)) |q_i q'_{i+1}| + \lambda r, \\ \frac{df}{d|q_i q'_{i+1}|} &= \frac{1}{2} (\sin(\Phi_i) - \lambda \sin(\theta_i)) |q_i q_{i+1}| + \lambda r, \\ \frac{df}{d\lambda} &= r(|q_i q_{i+1}| + |q_i q'_{i+1}| - d_i) - \\ &\quad \frac{1}{2} \sin(\theta_i) |q_i q_{i+1}| |q_i q'_{i+1}| \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

求最优值时应满足上式各式为零,解得最值时有  $|q_i q_{i+1}| = |q_i q'_{i+1}|$ ,同时直线  $q_{i+1} q'_{i+1}$  为过  $q$  的切线,则有

$$|q_s q_{i+1}| = |q_{i+1} q| = |q q'_{i+1}| = |q'_{i+1} q_e| = d'_{i+1}, \quad (7)$$

式(7)中  $d'_{i+1} = e / \tan(\theta_i/2)$ 。

根据这种几何特征,简化圆弧插补计算,同时具有圆弧插补效果。在一个插补周期  $T$  内插补距离为  $d'_{i+1}$ ,拐角过渡插补速度为  $v_i = d'_{i+1}/T$ 。

如图 1 所示,第 1 次拐角插补点计算:

$$\left. \begin{aligned} q_{i+1} &= \frac{(d_i - d'_{i+1})q_s + d'_{i+1}q_i}{d_i}, \\ q'_{i+1} &= \frac{d'_{i+1}q_i + (d_i - d'_{i+1})q_e}{d_i}, \\ t_i &= \frac{q_{i+1} + q'_{i+1}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

依据文献[5-6],考虑到机床动力学的特性,衔接速度要满足

$$v_i \leq \min \left\{ \frac{\alpha_m T}{2 \sin(\theta_i/4)}, \sqrt{\alpha_m r} \right\}. \quad (9)$$

式中:  $\alpha_m$  为机床允许的最大加速度。

若衔接速度不满足式(9),需要在圆弧  $q_s t_i$  和圆弧  $t_i q_e$  重新计算最佳过渡直线,由于对称性,只考虑圆弧  $q_s t_i$  部分,圆弧  $t_i q_e$  部分计算同理,如图 2 所示。

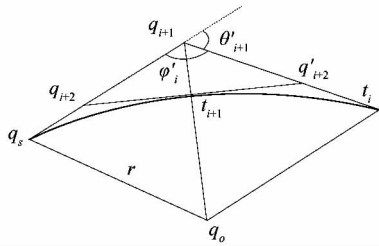


图 2 圆弧  $q_s t_i$  段插补点计算

Figure 2 Transition interpolation of arc  $q_s t_i$

第 2 次圆弧  $q_s t_i$  拐角处插补点计算为:

$$\left. \begin{aligned} q_{i+2} &= \frac{(d'_{i+1} - d'_{i+2})q_s + d'_{i+2}q_{i+1}}{d'_{i+1}}, \\ q'_{i+2} &= \frac{d'_{i+2}q_{i+1} + (d'_{i+1} - d'_{i+2})t_i}{d'_{i+1}}, \\ t_{i+1} &= \frac{q_{i+2} + q'_{i+2}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式(10)中:

$$\begin{aligned} d'_{i+2} &= e' / \tan(\theta'_i/2), \\ e' &= |q_{i+1} t_{i+1}| = e(1 - \cos \theta'_i) / \cos \theta'_i. \end{aligned}$$

再按式(2)约束进行判断,若不满足条件,则继续按上文方法处理。每次迭代计算,其拐角  $\theta_i$  按指数变化,第  $n$  次圆弧过渡逼近线段拐角为  $\theta_i/2^n$ ,可知迭代计算次数为有限次,最终确定插补点数据需  $2^{n+1}$  插补周期和计算  $2^{n+1} - 1$  插补点。

## 2 小线段 S 型加减速规划算法

### 2.1 离散 S 型加减速控制模型

针对梯形加减速规划时存在加速度突变点,会产生加加速度为无穷大值,容易造成机床的振动和噪声,从而易产生速度波动,导致机床运动精度降低。为达到运动精度要求,通常采用 S 型加减速即速度和加速度连续,加加速度有界的方法实现机床加工的柔性控制和连续小线段拐角高速转接。实际控制中连续加减速模型离散化后产生误差,本文直接规划离散 S 型加减速模型达到精确控制。S 型加减速控制模型,速度图如图 3 所示,依据加速度变化可把整个过程分为 5 个阶段,加加速,减加速,匀速段,加减速,减减速<sup>[7-10]</sup>。为简化处理,假设加加速段和减加速段周期相等为  $n_a$ ,加减速段和减减速段周期相等为  $n_d$ 。

假设插补最大速度为  $v_m$ ,最大加速度为  $\alpha_m$ ,最大加加速度为  $j_m$ ,起点速度为  $v_s$ ,终点速度为  $v_e$ ,小线段距离为  $L$ 。

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^{n_a} (v_s + \frac{j_m}{2} i^2) + \sum_{i=1}^{n_a} (v_m - \frac{j_m}{2} i^2) + \\ &\sum_{i=1}^m v_m + \sum_{i=1}^{n_d} (v_m - \frac{j_m}{2} i^2) + \sum_{i=1}^{n_d} (v_e + \frac{j_m}{2} i^2) = \\ &(n_a + n_d + m)v_m + n_a v_s + n_d v_e \end{aligned} \quad (11)$$

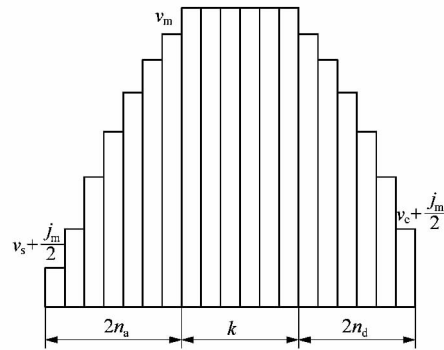


图 3 离散 S 型加减速速度模型

Figure 3 Discrete model of S-shape Acc/Dec

如果小线段  $L$  足够长,则可以加速到  $v_m$ ,所需要加速段和减速段周期分别为(并向下取整)

$$n_a = \sqrt{(v_m - v_s)/j_m}, n_d = \sqrt{(v_m - v_e)/j_m}; \quad (12)$$

匀速段周期为(并向下取整)

$$k = (L - n_a v_s - n_d v_e) / v_m - n_a - n_d. \quad (13)$$

从式(13)可以得出当  $k > 0$  上,有速度  $v_m$  匀速段;反之,最高速达不到。下面分别讨论这 2 种情况。

### 2.2 最大速度为 $v_m$

前面对  $n_a, n_d, k$  计算结果进行向下取整,可能存

在剩余距离,即

$$L_e = L - (n_a + n_d + k)v_m - n_a v_s - n_d v_e \quad (14)$$

对剩余距离的处理以  $\Delta v$  平均分配到加速段和减速段,如图4阴影部分所示。经改进后,加速段的最后1个周期和减速段的第1个周期的  $j_m$  值有变化,其余各周期  $j_m$  值不变。

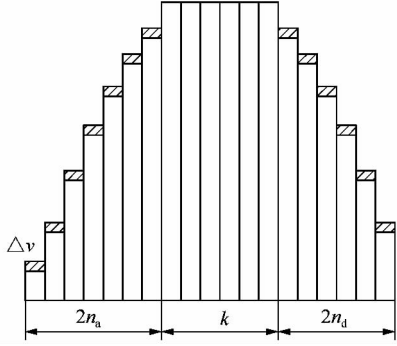


图4 调整后速度图

Figure 4 Speed diagram after adjusted

由上可知,在可以达到最大速度  $v_m$  下,第  $i$  周期的速度为

$$v_i = \begin{cases} v_s + \frac{j_m}{2}i^2 + \Delta v & 1 \leq i \leq n_a, \\ v_m - \frac{j_m}{2}(2n_a - i)^2 + \Delta v & n_a \leq i \leq 2n_a, \\ v_m & 2n_a \leq i \leq 2n_a + k, \\ v_m - \frac{j_m}{2}(i - 2n_a - k)^2 + \Delta v & 2n_a + k \leq i \leq 2n_a + n_d + k, \\ v_e + \frac{j_m}{2}(2n_a + 2n_d + k - i)^2 + \Delta v & 2n_a + n_d + k \leq i \leq 2n_a + 2n_d + k. \end{cases} \quad (15)$$

### 2.3 最大速度小于 $v_m$

当速度达不到最大值  $v_m$  时,此时可认为只有1个周期的匀速段,同时简化考虑加速段和减速段周期数相等,有  $n_a = n_d$  且有  $v'_m$  大于  $v_s$  和  $v_e$ ,如图5所示。则速度为:

$$v'_m = j_m(n_a + 1)^2 + v_s \quad (16)$$

此时距离为

$$L = \sum_{i=1}^{n_a} (v_s + \frac{j_m}{2}i^2) + \sum_{i=1}^{n_a} (v'_m - \frac{j_m}{2}i^2) + v'_m + \sum_{i=1}^{n_a} (v'_m - \frac{j_m}{2}i^2) + \sum_{i=1}^{n_a} (v_e + \frac{j_m}{2}i^2) = (2n_a + 1)v'_m + n_a(v_s + v_e) \quad (17)$$

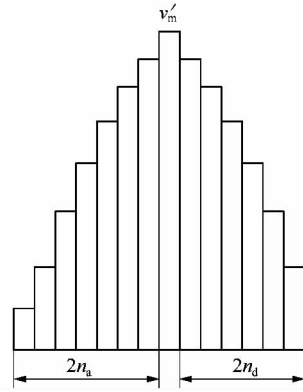


图5 最大速度小于  $v_m$  的速度模型

Figure 5 Velocity model of max speed less than  $v_m$

通过式(17)求解一元三次方程,可以得出  $n_a$ 。匀速段距离为  $L - n_a(v_s + v_e) - 2n_a v'_m$ ,所以匀速段周期数为

$$k = \frac{L - n_a(v_s + v_e) - 2n_a v'_m}{v'_m} = \frac{L - n_a(v_s + v_e)}{v'_m} - 2n_a \quad (18)$$

所以剩余距离  $L = L - (2n_a + k)v_m - n_a(v_s + v_e)$ ,将其以  $\Delta v = L_e/4n_a$  插入到加速段和匀速段中。所以,在达不到最大速度  $v_m$  下,第  $i$  周期的速度为

$$v_i = \begin{cases} v_s + \frac{j_m}{2}i^2 + \Delta v & 1 \leq i \leq n_a, \\ v'_m - \frac{j_m}{2}(2n_a - i)^2 + \Delta v & n_a \leq i \leq 2n_a, \\ v'_m & 2n_a \leq i \leq 2n_a + k, \\ v'_m - \frac{j_m}{2}(i - 2n_a - k)^2 + \Delta v & 2n_a + k \leq i \leq 3n_a + k, \\ v_e + \frac{j_m}{2}(4n_a + k - i)^2 + \Delta v & 3n_a + k \leq i \leq 4n_a + k. \end{cases} \quad (19)$$

### 3 算法仿真实验与分析

为验证本文算法的有效性和实用性,以  $X$ 、 $Y$  轴为例,现在给出8段连续小线段进行仿真,如表1所示。编程中需要设定的系统参数:最大加速度  $a_m = 1\ 000\ \text{mm/s}^2$ ,最大加加速度  $j_m = 50\ 000\ \text{mm/s}^3$ ,最大速度  $v_m = 1\ 800\ \text{mm/min}$ ,插补周期  $T = 2\ \text{ms}$ ,衔接处精度控制  $e = 0.003\ \text{mm}$ 。图6中细虚线为传统的S型加减速方式下加工的速度-时间曲线图,图中粗实线为本文算法的速度-时间曲线图。

在实际仿真计算中发现,实际本文算法迭代一到两次就可以满足要求,这主要受系统设定的参数影响,此时可发现过渡插补周期较少,过渡速度较高。从图

6 可以看出,本文的算法与传统的插补相比加工时间减少,大大提高了机床的加工效率,同时利用离散型加减速规划插补精度也得到提高。

表 1 小线段数据

Table 1 Data of small linear segment

X/mm	Y/mm	X/mm	Y/mm
11.967	8.213	21.283	4.796
14.741	8.574	23.867	4.302
16.568	8.097	25.997	4.182
19.039	6.414	27.866	3.827
19.899	5.538		

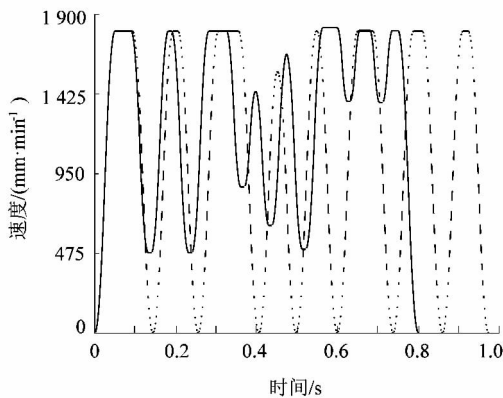


图 6 小线段加工速度图

Figure 6 Velocity diagram of small linear segment processing

### 4 结语

为了提高连续小线段衔接的光滑性和过渡速度,本文建立了连续小线段圆弧衔接采用多周期匀速插补模型,对连续小线段拐角处衔接利用圆弧约束,寻找最佳逼近圆弧的线段,同时通过机床动力学的约束条件

求得最优的过渡速度,达到圆弧过渡效果。与常规圆弧过渡插补相比,消除了插补圆弧时产生的弓高误差,计算插补点简单,并求得最优过渡的速度,且减少速度规划的难度。采用离散 S 型加减速规划方法使速度、加速度连续和加加速度有界,避免传统的梯形加减速中因加速度突变导致机床振动等问题,大大提高机床加工效率和加工精度,具有较高的应用性。

### 参考文献:

[1] 叶佩青,赵慎良.微小直线段的连续插补控制算法研究[J].中国机械工程,2004,15(15):1354-1356.

[2] 何均,游有鹏,陈浩,等.连续短线段空间圆弧转接与插补[J].航空学报,2010,31(5):1086-1092.

[3] ZHAO H,ZHU L M,DING H. A real-time look-ahead interpolation methodology with curvature-continuous B-spline transition scheme for CNC machining of shortline segments [J]. International journal of machine tools & manufacture,2013,65:88-98.

[4] BI Q Z,JIN Y Q,WANG Y H, et al. An analytical curvature-continuous Bézier transition algorithm for high-speed machining of a linear tool path [J]. International journal of machine tools & manufacture,2012,57:55-65.

[5] 王宇晗,肖凌剑,曾水生,等.小线段高速加工速度衔接数学模型[J].上海交通大学学报,2004,38(6):901-904.

[6] 张得礼,周末水.数控加工运动的平滑处理[J].航空学报,2006,27(1):125-130.

[7] ERKORKMAZ K, ALTINTAS Y. High speed CNC system design. Part I: jerk limited trajectory generation and quintic spline interpolation [J]. International journal of machine tools & manufacture,2001,41(9):1323-1345.

[8] 石川,赵彤,叶佩青,等.数控系统 S 曲线加减速规划研究[J].中国机械工程,2007,18(12):1421-1425.

[9] 陈友东,王田苗,魏洪兴,等.数控系统的直线和 S 形加减速研究[J].中国机械工程,2006,17(15):1600-1604.

[10] 郭新贵,李从心.S 曲线加减速算法研究[J].机床与液压,2002(5):60-62.

(上接第 33 页)

### 参考文献:

[1] 谢伟平,张伟,梁彦杰,等.厨余垃圾综合利用中有关问题探析[J].环境保护,2008,4(2):66-68.

[2] 李荣平,葛亚军,王奎升,等.餐厨垃圾特性及其厌氧消化性能研究[J].可再生能源,2010,28(1):76-80.

[3] CALLAGHAN F J,WASE D A J,THAYANITHY K, et al. Continuous co-digestion of cattle slurry with fruit and vegetable wastes and chicken manure[J]. Biomass & bioenergy,2002,22(1):71-77.

[4] 袁祖强,景荣荣,倪受东.基于 FLUENT 的陶瓷浆料搅拌槽的结构优化[J].机械设计与制造,2009,23(3):23-25.

[5] 王杰,袁月明,崔彦如,等.不同桨层搅拌沼气发酵效果对比及其 CFD 模拟研究[J].中国农机化,2012,36(5):126-129.

[6] 蒋啸靖,夏建业,赵劫,等.生物搅拌反应器内混合情况的 CFD 模拟及在发酵中的应用[J].化学与生物工程,2008,25(7):54-57.

[7] 张庆文,蔡子金,李军庆,等.利用 CFD 模拟技术改造 60 m<sup>3</sup> 木聚糖酶发酵罐[J].食品与机械,2013,29(5):107-110.

[8] WANG Xu,DING Jie, GUO Wanqian, et al. Scale-up and optimization of biohydrogen production reactor from laboratory-scale to industrial-scale on the basis of computational fluid dynamics simulation [J]. International journal of hydrogen energy, 2010, 35 (20): 10960-10966.

[9] 永田进治.混合原理与应用[M].马继顺,译.北京:化学工业出版社,1984.

[10] 杨小波.桨式搅拌器的功率计算[J].有色设备,2008(2):10-12.