

[研究·设计]

DOI:10.3969/j.issn.1005-2895.2016.02.008

# 复杂转子系统特征值问题的随机摄动分析

董亚军, 刘保国

(河南工业大学机电工程学院, 河南 郑州 450007)

**摘要:**在实际工程中转子系统的参数往往具有不确定性,为了更好地对转子系统的稳定性、可靠性和故障诊断等方面进行研究,正确分析随机参数对转子系统振动特性的影响已经成为不可忽视的问题。文章使用随机摄动传递矩阵方法研究复杂转子系统的随机特征值问题,计算分析了中介轴承随机参数对双转子系统阻尼特征值的影响,将计算结果与 Monte Carlo 随机模拟法的计算结果比较,验证了随机摄动传递矩阵方法的可靠性和实用性。该随机摄动分析方法可以应用在研究随机参数对转子系统动力学特性和响应影响的计算分析中。

**关键词:**复杂转子;随机参数;特征值;随机摄动;传递矩阵

中图分类号:TH113 文献标志码:A 文章编号:1005-2895(2016)02-0034-04

## Random Perturbation Analysis on Eigenvalue Problem of Complex Rotor System

DONG Yajun, LIU Baoguo

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Henan University of Technology, Zhengzhou 450007, China)

**Abstract:** In the actual engineering, the parameters of the rotor system are often uncertain. In order to better research the stability, reliability and fault diagnosis of the rotor system, the influence of random parameters on the vibration characteristics of the rotor system has become a problem which can not be ignored. The random perturbation transfer matrix method was used to study the random eigenvalue problem of complex rotor system, and the influence of the random parameters of the intermediate bearing on the damping characteristics of the dual rotor system was calculated and analyzed. The results compared with the calculation results by the Carlo Monte stochastic simulation method verified the reliability and availability of random perturbation transfer matrix method. The random perturbation analysis method can be applied to the analysis of the influence of the random parameters on the dynamic characteristics and response of the rotor system.

**Key words:** complex rotor; random parameters; eigenvalue; random perturbation; transfer matrix

转子系统在制造、安装、维护过程中不可避免地要产生误差,使得系统的物理参数和几何参数必然有一定程度的随机性,从而导致系统刚度、质量和阻尼等参数的随机性,继而影响转子系统的动力学特性和动力学响应<sup>[1]</sup>。正确分析各种随机参数对系统的动力学特性和响应的影响,对工程实践具有十分重要的意义。

在现阶段的研究中,计算分析转子系统随机参数特征值问题比较常用的方法是 Monte Carlo 随机模拟

法。在实际应用中,使用 Monte Carlo 随机模拟法虽然能够达到很高的模拟精度,但是由于需要模拟成千上万次,往往会花费大量的计算时间<sup>[2-3]</sup>。

随机摄动传递矩阵法是研究转子动力学问题的有效手段,具有公式简单、易于编程和数值稳定等优点<sup>[4-8]</sup>。因此本文将重点研究用随机摄动传递矩阵法求复杂转子系统特征值问题,计算结果与 Monte Carlo 随机模拟法计算结果进行对比,从而验证随机摄动传

收稿日期:2015-08-28;修回日期:2015-10-23

基金项目:国家自然科学基金项目面上项目(10872064);国家自然科学基金项目面上项目(11172092)。

作者简介:董亚军(1990),男,河南登封人,硕士研究生,主要研究方向为机械振动。E-mail:yajun525@qq.com 通信作者:刘保国(1962),男,河南武陟人,教授,博士生导师,研究方向为机械振动和转子动力学。

递矩阵方法的可靠性和实用性。

### 1 随机摄动传递矩阵法求特征值公式<sup>[9-12]</sup>

假定  $x_j(j=1, \dots, m)$  是复杂转子系统的  $m$  个随机参数, 这些随机参数表示为

$$x_j = x_{j0}(1 + \varepsilon_j) \quad (j=1, \dots, m)。 \quad (1)$$

式中:  $x_{j0}(j=1, \dots, m)$  是  $m$  个随机参数均值;  $\varepsilon_j(j=1, \dots, m)$  是具有零均值的随机变量。

可以得出

$$E(x_j) = x_{j0} \quad (j=1, \dots, m), \quad (2)$$

$$E(\varepsilon_j) = 0 \quad (j=1, \dots, m)。 \quad (3)$$

式中:  $E(x_j)$  为复杂转子系统的  $m$  个随机参数的均值;  $E(\varepsilon_j)$  为  $m$  个随机变量的均值。

$$\text{写成矩阵形式 } E\{\varepsilon\} = \{0\}, \quad (4)$$

其中

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m\}^T。 \quad (5)$$

由于复杂转子系统参数  $x_j$  具有随机性, 则系统的特征值  $\beta$  和特征向量  $\{\Phi\}$  必然也具有随机性。在这里可以假定  $\varepsilon_j(j=1, \dots, m)$  为小参数, 则系统的第  $q$  阶特征值  $\beta_q$  和特征向量  $\{\Phi\}_q$  可以使用 Taylor 级数展开, 取二阶近似有:

$$\beta_q = \beta_{q,0} + \sum_{j=1}^m \beta_{q,j} \varepsilon_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^j \beta_{q,jk} \varepsilon_j \varepsilon_k \quad (6)$$

$$\{\Phi\}_q = \{\Phi\}_{q,0} + \sum_{j=1}^m \{\Phi\}_{q,j} \varepsilon_j +$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^j \{\Phi\}_{q,jk} \varepsilon_j \varepsilon_k \quad (7)$$

式中:  $\beta_{q,0}, \beta_{q,j}, \beta_{q,jk}$  分别是复杂转子系统第  $q$  阶特征值的零阶、一阶和二阶摄动;  $\{\Phi\}_{q,0}, \{\Phi\}_{q,j}, \{\Phi\}_{q,jk}$  分别是复杂转子系统第  $q$  阶特征向量的零阶、一阶和二阶摄动。

用特定系数法求解  $\beta_{q,0}, \beta_{q,j}, \beta_{q,jk}, \{\Phi\}_{q,0}, \{\Phi\}_{q,j}$  和  $\{\Phi\}_{q,jk}$ , 其中用到了 Riccati 传递矩阵法和摄动理论等方法, 具体的求解过程见参考文献[10-11]。

由以上公式可以得出复杂转子系统特征值的均值和方差分别为:

$$E[\beta_q] = \beta_{q,0} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^j \beta_{q,jk} E[\varepsilon_j \varepsilon_k], \quad (8)$$

$$D[\beta_q] = E|\beta_q - E[\beta_q]|^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^j \beta_{q,j} \beta_{q,k} E[\varepsilon_j \varepsilon_k] + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \beta_{q,j} \beta_{q,kl} \times E[\varepsilon_j \varepsilon_k \varepsilon_l] + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{s=1}^m \beta_{q,jk} \beta_{q,ls} \times$$

$$|E[\varepsilon_j \varepsilon_l \varepsilon_l \varepsilon_s] - E[\varepsilon_j \varepsilon_k] E[\varepsilon_l \varepsilon_s]|。 \quad (9)$$

特征向量的均值和协方差分别为:

$$E[\{\Phi\}_q] = \{\Phi\}_{q,0} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^j \{\Phi\}_{q,jk} E[\varepsilon_j \varepsilon_k], \quad (10)$$

$$I_{\text{cov}}[\{\Phi\}_q, \{\Phi\}_q^T] = E|[\{\Phi\}_q - E[\{\Phi\}_q]][\{\Phi\}_q^T - E[\{\Phi\}_q^T]]| = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \{\Phi\}_{q,j} \{\Phi\}_{q,k}^T E[\varepsilon_j \varepsilon_k] + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m |\{\Phi\}_{q,j} \{\Phi\}_{q,kl}^T + \{\Phi\}_{q,kl} \{\Phi\}_{q,j}^T| \times E[\varepsilon_j \varepsilon_k \varepsilon_l] + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{s=1}^m \{\Phi\}_{q,jk} \{\Phi\}_{q,ls}^T \times |E[\varepsilon_j \varepsilon_l \varepsilon_l \varepsilon_s] - E[\varepsilon_j \varepsilon_k] E[\varepsilon_l \varepsilon_s]|。 \quad (11)$$

式中:  $\varepsilon_l, \varepsilon_s, \varepsilon_k$  分别表示复杂转子系统的第  $l, s, k$  个随机变量;  $\beta_{q,ls}$  表示随机变量为  $l, s$  时复杂转子系统第  $q$  阶特征值的二阶摄动;  $\{\Phi\}_{q,ls}$  表示随机变量为  $l, s$  时复杂转子系统第  $q$  阶特征向量的二阶摄动;  $\beta_{q,kl}, \{\Phi\}_{q,kl}$  类似。

基于该随机摄动传递矩阵法, 结合具体的算例, 计算分析复杂转子系统特征值问题, 并编制相应的 MATLAB 计算分析程序。

### 2 算例<sup>[13]</sup>

图 1 为单中介轴承有阻尼轴对称双转子系统结构示意图, 在这个系统里, 轴承 A, B 为支撑内转子运转的支撑轴承, C 为支撑外转子运转的支撑轴承, 内外转子由中介轴承 D 连接。

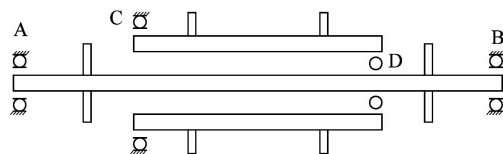


图 1 单中介轴承有阻尼轴对称双转子系统的结构示意图

Figure 1 Structure diagram of single intermediate bearing with damping axis symmetric dual rotor system

图 2 为单中介轴承有阻尼轴对称双转子系统的计算模型, 将这个双转子系统划分为 8 个轴段, 10 个节点。

在这个双转子系统中, 4 个轴承的刚度和阻尼系数如表 1 所示, 该系统轴转速和刚度等结构参数如表 2 所示。其中表 2 中的弹性模量为 200 GPa。

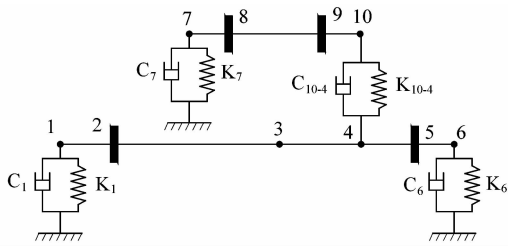


图2 单中介轴承有阻尼轴对称双转子系统的计算模型

Figure 2 Calculation model of single intermediate bearing with damping axis symmetric dual rotor system

表1 轴承的刚度和阻尼系数

Table 1 Bearing stiffness and damping coefficient

轴承号	刚度 $K \times 10^7 / (N \cdot m^{-1})$	阻尼 $C / (N \cdot s \cdot m^{-1})$
A	2.626 9	5 254
B	1.751 3	3 502
C	1.751 3	3 502
D	0.875 6	1 751

表3 双转子系统的特征值均值计算结果

Table 3 Mean eigenvalue calculate results of double rotor system

方法	一阶均值	二阶均值	三阶均值	计算时间/s
Monte Carlo 随机模拟法	$-1.994\ 501 + 469.502\ 572i$	$-11.934\ 344 + 679.614\ 177i$	$-115.478\ 895 + 1\ 423.499\ 893i$	1 629.00
随机摄动传递矩阵法	$-1.994\ 499 + 469.502\ 573i$	$-11.804\ 520 + 679.653\ 659i$	$-114.167\ 907 + 1\ 423.661\ 354i$	2.53

表4 双转子系统的特征值均值比较

Table 4 Mean eigenvalue comparison results of double rotor system

方法	误差/%		
	一阶均值	二阶均值	三阶均值
Monte Carlo 随机模拟法	$2.114\ 8E-007$	$5.474\ 2E-003$	$3.888\ 8E-003$
随机摄动传递矩阵法			

分析以上2种方法计算的结果可以发现,二者计算结果误差很小,一阶均值误差为 $10^{-7}$ 数量级,二阶和三阶均值误差为 $10^{-3}$ 数量级,能够保持很高的精度,完全可以满足工程实际的需求。

Monte Carlo 随机模拟法计算特征值是随机模拟计算一万次求得平均值,在编写的 MATLAB 程序中计算时间为1 629 s,而用随机摄动传递矩阵法只需要用2.53 s,在满足需求的同时,大大的减少了计算时间,提高了运算效率。

#### 4 结语

随机摄动传递矩阵法,之前应用在随机参数转子系统动力响应的概率密度分析中,而本文主要用于计

表2 双转子系统的结构参数

Table 2 Structural parameters of dual rotor system

转子号	轴转速/ ( $r \cdot s^{-1}$ )	轴刚度 $\times 10^{-9} /$ ( $N \cdot m^{-1}$ )	节点	质量/ kg	转动惯量 $I_p /$ ( $kg \cdot m^{-2}$ )	轴段长度 L/m
I	1 047	2.646 7	1	0.058	0.000	0.000.0
			2	10.702	0.086	0.076 2
			3	0.250	0.000	0.177 8
			4	0.155	0.000	0.152 4
			5	7.807	0.068	0.050 8
			6	0.039	0.000	0.050 8
II	1 570	21.935 0	7	0.047	0.000	0.000.0
			8	7.202	0.043	0.050 8
			9	3.692	0.028	0.132 4
			10	0.047	0.000	0.050 8

将以上模型参数代入编写的 MATLAB 计算程序中,求得该转子系统的一阶、二阶、三阶特征值均值及标准差。为验证该摄动分析法的可靠性和实用性,将该结果与 Monte Carlo 随机模拟法计算特征值均值结果进行比较,二者计算和比较结果分别如表3和表4所示。

算复杂转子系统特征值问题。通过结合具体复杂转子系统算例计算出三阶以内特征值均值,与 Monte Carlo 随机模拟法分析结果进行比较,可以看出二者误差很小,且随机摄动法计算时间大大减少。从而验证了随机摄动分析方法具有较高的可靠性和实用性,能够正确分析随机参数对转子系统振动特性的影响,满足实际工程的需要。本文研究的复杂转子系统采用的是单中介轴承有阻尼轴对称双转子系统,是一个简化案例,在今后的研究中需将该方法应用在工程实际转子系统中,进一步地验证随机摄动传递矩阵法的可靠性。

#### 参考文献:

- [1] 陈塑寰. 随机参数结构的随机特征值分析[J]. 吉林工业大学学报, 1987(4): 12-18.
- [2] 黎锁平. 运用蒙特卡罗方法求解随机性问题[J]. 甘肃工业大学学报, 2001, 27(2): 95-97.
- [3] HURTADO J E, BARBAT A H. Monte Carlo techniques in computational stochastic mechanics [J]. Archives of computational methods in engineering, 1998, 5(1): 3-29.
- [4] 刘保国, 桑广伟. 动力响应问题的摄动 Riccati 传递矩阵方法[J]. 机械科学与技术, 2007, 26(5): 589-594.