

[研究·设计]

DOI:10.3969/j.issn.1005-2895.2022.01.002

传感器弹性元件本构模型参数拟合研究

范海伦, 祖洪飞, 向忠, 彭来湖*

(浙江理工大学机械与自动控制学院, 浙江杭州 310018)

摘要:针对多维位移测量系统结构复杂、成本高等缺点,课题组提出一种单一固体集成传感器,为了准确描述传感器弹性元件力学特性,在不同应变率下对传感器弹性元件进行准静态单轴压缩试验。将超弹性本构模型运用泰勒展开式进行整理简化,得到应力-应变关系,利用 Origin 对应力-应变曲线进行数据拟合;选用 Mooney-Rivlin, Yeoh, Biderman 和 Ogden 这 4 种超弹性本构模型对试验曲线进行描述。研究结果表明: Biderman 模型对曲线的拟合效果最好, Mooney-Rivlin 模型拟合效果最差,其他模型都存在小应变拟合差和中等以上不同程度的偏离的情况。本研究得到的应力应变关系为传感器的进一步研究提供重要参考。

关键词:弹性元件;本构模型;压缩试验;应力-应变曲线;拟合分析

中图分类号:TH703.1;TP212 文献标志码:A 文章编号:1005-2895(2022)01-0007-07

Parameter Fitting Study of Constitutive Model of Elastic Element of Sensor

FAN Hailun, ZU Hongfei, XIANG Zhong, PENG Laihu*

(Faculty of Mechanical Engineering & Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Aiming at the disadvantages of complex structure and high cost of multi-dimensional displacement measurement system, a single solid integrated sensor was proposed. In order to accurately describe the mechanical characteristics of the elastic element of the sensor, the quasi-static uniaxial compression test of the elastic element of the sensor was carried out under different strain rates. The hyperelastic constitutive model was sorted and simplified by using Taylor expansion to obtain the stress-strain relationship, and the stress-strain curve was fitted by using Origin. Four hyperelastic constitutive models, Mooney-Rivlin, Yeoh, Biderman and Ogden, were selected to describe the experimental curve. The results show that the Biderman model has the best fitting effect on the curve, the Mooney-Rivlin model has the worst fitting effect, and other models have small strain fitting differences and moderate or higher deviations. The final obtained stress-strain relationship provides an important reference for the further research on the sensor.

Keywords: elastic element; constitutive model; compression test; stress-strain curve; fitting analysis

多维位姿测量^[1]系统是保证机械手定位及轨迹精度的关键装置,传统的多维位姿测量多是通过多个单自由度位移传感器或编码器^[2-3]来实现的,测量系统结构复杂,成本高,且容易产生多轴累积误差,难以满足精密位移测量的需求。因此,迫切需要一种精度高、结构简单的单体集成多维位姿传感器。通过测试对

比,最终选取聚氨酯作为弹性体软轴的材料,在进一步研究该传感器传感特性的过程中,要对弹性体的运动及形变情况进行分析。由于聚氨酯为非线性材料,很难通过直接计算得到精确的解析解,因此通常需要借助仿真工具进行分析,而进行仿真分析的前提是要得到该材料的超弹性本构模型。本构模型描述了弹性体

收稿日期:2021-09-22;修回日期:2021-11-28

基金项目:浙江省重点研发计划(2019C01038);浙江省自然科学基金资助项目(LQ20E050020);浙江理工大学科研启动基金项目(18022219-Y);浙江理工大学青年创新专项(20022119-Y);2020年度浙江省博士后科研择优资助项目(ZJ2020102)。

第一作者简介:范海伦(1992),男,山东高密人,硕士,主要研究方向为机械手位移传感器。通信作者:彭来湖(1980),男,浙江苍南人,博士,讲师,主要从事智能设备及数控技术、智能制造和仪器仪表方面的研究。E-mail:laihup@zstu.edu.cn

应力-应变关系,而其应力-应变关系是最终得到该传感器应变-位移关系的基础及核心,因此获得合适的超弹性本构模型就成为研究该传感器的关键所在。

对于弹性体材料的本构模型,国内外学者进行了大量的研究,并提出了多个模型:魏志刚等^[4]基于弹性体的第1、第3主伸长率提出了一种新的本构模型,该模型对初始参数依赖小,只需通过试验就能获得较为可靠的模型参数,但该试验需构建特定的主坐标系,具有一定的局限性;冯希金等^[5]针对未硫化橡胶,结合单轴拉压与剪切试验,使用 Yeoh 应变能函数的广义 Maxwell 黏超弹性模型对未硫化橡胶进行拟合,发现该模型可以较好地描述未硫化橡胶的参数特征,为以后研究未硫化橡胶提供了一种新的思路;刘高冲等^[6]对聚氨酯弹性体进行了静态与动态的单轴压缩试验,最终得到了聚氨酯弹性体与应变率相关本构模型,从而可以较好地描述应变率对聚氨酯弹性体的影响。上述文献对各种橡胶材料在不同的温度及不同的应变幅值下的本构模型进行了研究分析,但都是对弹性体应力-伸长比之间的关系进行研究,没有深入探讨应力-应变关系。

课题组以聚氨酯弹性体作为传感器弹性元件进行研究,研究了聚氨酯弹性体压缩状态下的本构模型,由于篇幅有限对于弯曲以及拉伸暂时不做研究。以圆柱状聚氨酯弹性体压缩试样为研究对象,在不同的应变率下对试样进行循环加载;然后,采用多种超弹性本构模型对其加载曲线的应力-应变关系进行拟合,对比分析各本构模型的拟合精度,选取最合适的本构模型。

1 弹性体材料本构模型

与金属材料的线弹性不同,聚氨酯等弹性体橡胶材料的应力-应变关系呈非线性变化,该类材料发生大变形后可以恢复原始状态,即变形可逆,因此可以看作超弹性材料,并且可以认为它们各向同性,对于此类材料,它们的应变能函数可表示为:

$$W = W(I_1, I_2, I_3)。(1)$$

式中: I_1, I_2, I_3 分别为 Cauchy-Green 变形张量的第1,第2,第3基本不变量。

超弹性材料的柯西应力张量可以表示为:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{B} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^{-1}。(2)$$

式中: p 为静水压力, \mathbf{I} 为单位张量, \mathbf{B} 为变形张量。

对于单轴压缩、拉伸,设伸长率为 λ ,3 个主伸长率关系为 $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}$,又由于超弹性材料可以看作各向同性不可压缩,所以 $I_3 = 1$ 。则:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}; \\ I_2 &= 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2}; \\ I_3 &= 1. \end{aligned} \right\} (3)$$

将式(3)代入式(2)可推导出真实应力

$$\sigma_T = 2\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)。(4)$$

又因真实应力 σ_T 与工程应力 σ 满足 $\sigma_T = \lambda\sigma$,则工程应力

$$\sigma = 2\left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right)\left(\lambda\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\right)。(5)$$

1.1 Mooney-Rivlin 本构模型

Rivlin 在研究应变能函数一般形式时,推导出了各向同性不可压缩材料的应变能函数

$$W = \sum_{m=0, n=0}^{\infty} C_{mn}(I_1 - 3)^m(I_2 - 3)^n。(6)$$

式中 C_{mn} 为常数,且满足 $C_{00} = 0$ 。

Mooney^[7]在式(1)的基础上,取其前2项,其他各项的 $C_{mn} = 0$,有:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)。(7)$$

式(7)被称为 Mooney-Rivlin 公式。将式(7)代入式(5)可求得 Mooney-Rivlin 模型应力-伸长率关系式:

$$\sigma = 2\left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right)(C_{10}\lambda + C_{01})。(8)$$

伸长率 λ 与应变 ε 满足: $\lambda = 1 + \varepsilon$ 。式(8)整理后可写为:

$$\sigma = 2C_{10}\left[1 + \varepsilon - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2}\right] + 2C_{01}\left[1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^3}\right]。(9)$$

将式(9)进行泰勒展开,因为 ε 最大为 0.2, $\varepsilon \gg \varepsilon^4$,因此酌情保留到展开式的三次项或者四次项。

$$(1 + \varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\varepsilon^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!}\varepsilon^n + R_n(\varepsilon)。(10)$$

则 Mooney-Rivlin 模型应力-应变关系式为:

$$\sigma = 2C_{10}(4\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon) + 2C_{01}(10\varepsilon^3 - 6\varepsilon^2 + 3\varepsilon)。 \quad (11)$$

Mooney-Rivlin 模型广泛应用于现代工程中,对拉伸不超过 200% 的橡胶材料试验数据具有较好的拟合,但是研究发现其对压缩试验数据拟合效果较差。

1.2 Yeoh 本构模型

在 Mooney-Rivlin 本构方程的基础上, Yeoh^[8] 提出了 3 项应变能函数,该应变能函数只含有 1 个应变张量不变量 I_1 ,而不含有第 2 应变张量不变量 I_2 ,因此 Yeoh 本构方程也被称为减缩多项式方程。其应变能函数

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3。 \quad (12)$$

将式(12)代入式(5)可求得 Yeoh 模型应力-伸长率关系式,整理后得到应力-应变关系式:

$$\sigma = 2C_{10}(4\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon) + 36C_{20}\varepsilon^3 + 54C_{30}(-\varepsilon - 1)。 \quad (13)$$

因 Yeoh 模型不含有 I_2 项,但是含有 I_1 的更高次项,所以其对中等及以上应变具有较好的拟合效果,但是不能很好地描述等双轴拉伸状态。

1.3 Biderman 本构模型

Biderman^[9] 在 Yeoh 模型的基础上增添了应变张量不变量 I_2 ,试验结果表明:单轴拉压状态下,相对于 Yeoh 模型,Biderman 模型具有更好的拟合效果。其应变能函数

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3)。 \quad (14)$$

整理得到应力-应变关系式:

$$\sigma = 2C_{10}(6\varepsilon^5 - 5\varepsilon^4 + 4\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon) + 2C_{01}(21\varepsilon^5 - 15\varepsilon^4 + 10\varepsilon^3 - 6\varepsilon^2 + 3\varepsilon) + 4C_{20}(24\varepsilon^5 - 15\varepsilon^4 + 9\varepsilon^3) + 162C_{30}\varepsilon^5。 \quad (15)$$

需要说明的是,由于最后一项 C_{30} 系数展开式只有 ε^5 ,因此其他系数项皆保留到 ε^5 。

1.4 Ogden 本构模型

Ogden^[10] 并没有使用应变张量不变量表述橡胶本构的应变能函数,而是使用主伸长率来代替应变张量不变量,这样简化了描述应变能函数。其应变能函数

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3)。 \quad (16)$$

式中: i 和 n 表示材料参数的项数; λ_i 为主伸长率; μ_i , α_i 分别为试验确定的材料常数。

Ogden 模型对材料的各种变形皆有较好的拟合效果,但是工程中一般使用不超过 4 项展开式,因为若超过 4 项,其拟合参数过多,迭代时间增加,误差增大,仿真困难。因此课题组选用 Ogden 模型 3 项展开式。工程应力

$$\sigma = \sum_{i=1}^3 \mu_i [(1 + \varepsilon)^{\alpha_i - 2} - (1 + \varepsilon)^{-\frac{\alpha_i}{2} - 2}]。 \quad (17)$$

2 试验方法与试样

本试验所采用的聚氨酯压缩试样密度为 1.2 g/cm³,邵氏硬度 (90 ± 2) A,直径为 20 mm,高度 10 mm 的圆柱体,试验使用 WDW-5 电子万能试验机,并参照 GB/T7757—2009 进行。试验共制备 5 个压缩试样,分别对 5 个试样进行试验,取 5 次试验的平均值进行数据拟合。

试验仪器与试验材料如图 1 所示。课题组试验所用的工程应变为 20%,分别进行 0.010 0, 0.001 0, 0.000 3 s⁻¹ 的 3 种应变率加载试验。试验先将测得的力-位移曲线转化为应力-应变曲线,再对转化后的应力-应变曲线进行本构方程拟合。最终得到不同工况下的最优循环加卸载本构模型。

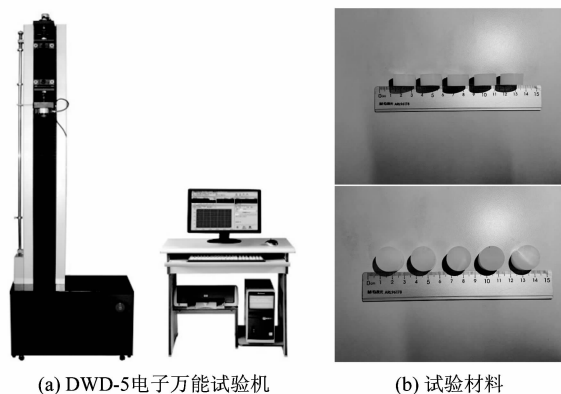


图 1 试验仪器与试验材料

Figure 1 Test equipment and materials

弹性体材料在加载卸载时,其卸载应力要远低于加载应力,经过多次循环加载、卸载,其应力应变曲线

才会几乎重合,这种现象就称为 Mullins^[11]效应。为消除 Mullins 效应,得到稳定加载曲线,需要在常温下对试样进行多次循环加载试验,此处采用的工程应变速率为 0.001 0 s⁻¹,最大工程应变为 20%。

图 2 所示为聚氨酯压缩循环加载 9 次的力-位移曲线。加载过程中发现在第 3 次加载后力-位移曲线趋于稳定,在第 5 次加载后力-位移曲线基本稳定。获取稳定的加载力-位移曲线对于后续的弹性体受力分析和模型创建具有重要的意义,因为弹性体在循环加载、卸载的工况下工作,若使用未消除应力软化的数据进行分析会导致模型误差很大。因此,课题组在对试样循环加载、消除 Mullins 软化效应的基础上进行后续试验。

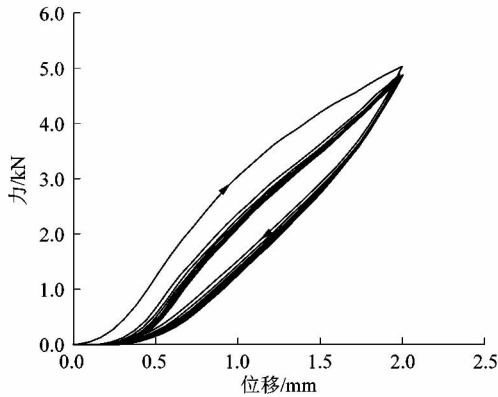


图 2 循环加载力-位移曲线

Figure 2 Cyclic loading force-displacement curve

3 本构模型的试验结果与分析

为获得合适的超弹性模型以准确地描述聚氨酯应力-应变关系,课题组分别对 Mooney-Rivlin, Yeoh, Biderman 以及 Ogden 这 4 种模型,在不同应变率下的数据进行了拟合分析。首先将试验所得数据进行处理,在试验机上直接测得力-位移关系数据,并将其转化为应力-应变关系,转换关系如下:

$$\sigma = \frac{F}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{4F}{\pi d^2}; \tag{18}$$

$$\varepsilon = \frac{|l_1 - l_0|}{l_0} = \frac{s}{l_0}。 \tag{19}$$

式中: F 为加载力, d 为试样直径, l_0 为初始厚度, l_1 为变形后的厚度, s 为试验数据中的位移。

课题组没有使用传统的 ABAQUS 等仿真分析软件对其进行本构模型拟合,而是使用 Origin 专业绘图软件对其拟合。将试验数据整理后导入绘图软件中,使用非线性拟合将前文本构模型的应力-应变公式输入其中,实现对试验数据的拟合。试验得到应力-应变曲线如图 3 所示。

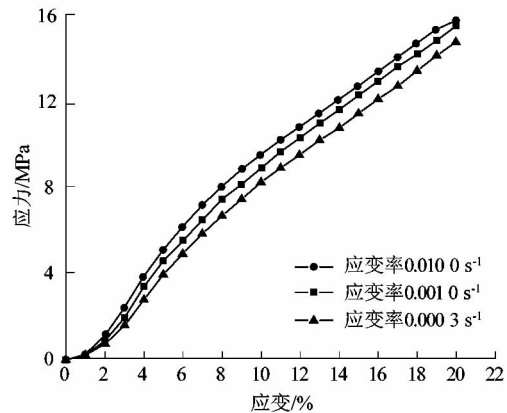


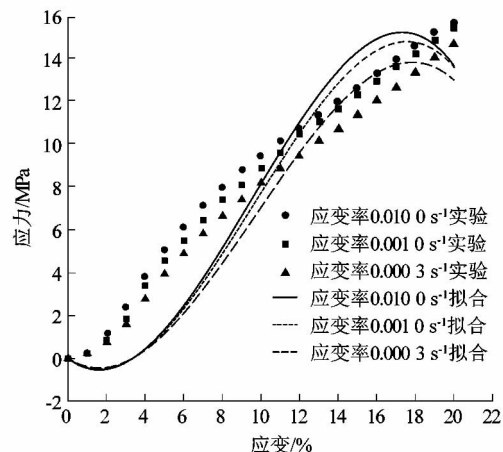
图 3 压缩加载应力-应变曲线

Figure 3 Compressive loading stress-strain curve

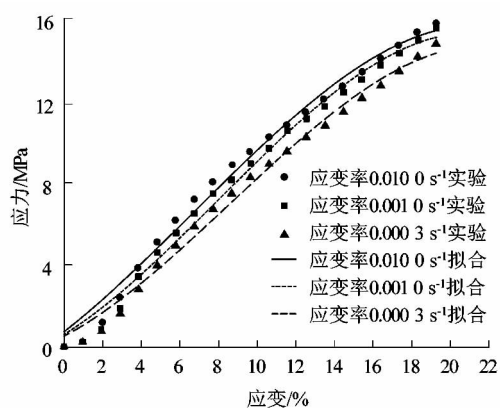
由图 3 可见,试验数据呈现“S”型,符合超弹性物质的性质。在 3 种加载应变率下,试验曲线形状几乎相同,在微小应变下曲线重合。在相同的应变下,随着应变率的增加聚氨酯弹性体受到的应力增大。

3.1 Mooney-Rivlin 本构模型

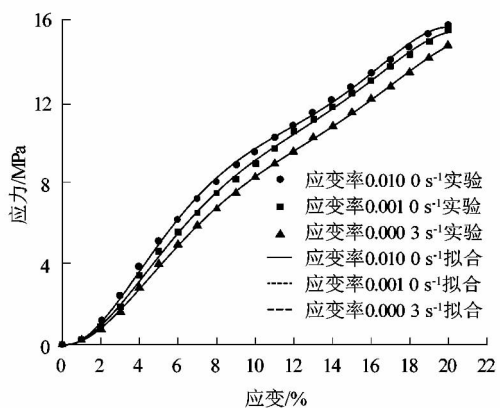
如图 4(a) 所示,Mooney-Rivlin 模型对 3 种应变率下的试验数据拟合偏离较远,尤其是在小应变情况下,这与其对压缩状态拟合较差的结论相符。在 0% ~ 3% 应变范围内,拟合曲线呈现负值,这与实际情况不



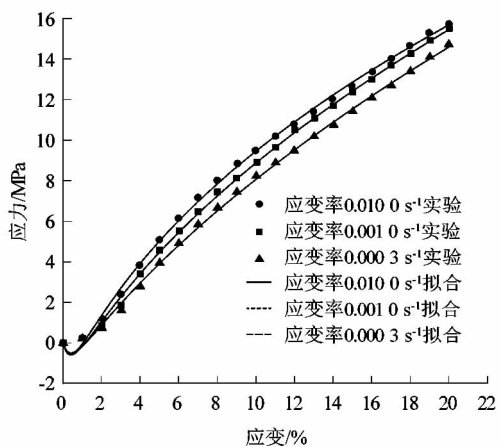
(a) Mooney-Rivlin 模型拟合曲线



(b) Yeoh模型拟合曲线



(c) Biderman模型拟合曲线



(d) Ogden模型拟合曲线

图4 不同应变率下4种模型拟合曲线
Figure 4 Fitting curves of four models at different strain rates

符,且在应变达到17%左右时拟合曲线有应力减小的趋势,这与试验数据持续上升的趋势也相反。因此,我们认为 Mooney-Rivlin 模型不能对本试验所用的压缩状态下的聚氨酯弹性体应力-应变关系进行描述。

Mooney-Rivlin 模型的拟合数据如表1所示。表1中 C_{10} 为负值,而 C_{01} 为正值,这与多数文献中对其他弹性体材料的拟合结果相反,一般情况下 C_{10} 为正值,而 C_{01} 为负值,这进一步说明了该模型不适合本试验中所使用的聚氨酯弹性体。

表1 Mooney-Rivlin 模型拟合参数

Table 1 Mooney-Rivlin model fitting parameters

应变率/ s^{-1}	C_{10}	C_{01}	卡方值
0.010 0	-0.189 78	0.075 50	4.744 07
0.001 0	-0.177 80	0.070 74	3.514 07
0.000 3	-0.160 07	0.063 69	2.710 50

3.2 Yeoh 本构模型

图4(b)所示为 Yeoh 本构模型应力-应变拟合结果,可以看出 Yeoh 本构模型拟合效果明显优于 Mooney-Rivlin 本构模型。当应变为0%~4%时, Yeoh 本构模型的应力高于试验数据较多;当应变为4%~12%时, Yeoh 本构模型应力逐渐接近试验数据;当应变为12%~19%时,拟合效果最好。Yeoh 本构模型拟合参数如表2所示。不同于硅胶等硬度较小的弹性体,课题组所采用的聚氨酯弹性体硬度较大,拟合参数第1、第3项为负值,第2项为正值,因此中等应变的拟合效果较好。

表2 Yeoh 模型拟合参数

Table 2 Yeoh model fitting parameters

应变率/ s^{-1}	C_{10}	C_{01}	C_{30}	卡方值
0.010 0	-0.004 58	0.000 98	-0.013 61	0.314 36
0.001 0	-0.006 91	0.001 49	-0.011 16	0.254 41
0.000 3	-0.006 88	0.001 49	-0.009 60	0.220 55

3.3 Biderman 本构模型

Biderman 本构模型的拟合结果如图4(c)所示,拟合参数如表3所示。可以发现, Biderman 本构模型在3种应变率下对试验数据的拟合效果均非常好,这表明 Biderman 本构模型能够很好地描述聚氨酯弹性体的受力情况。其原因是相对于 Yeoh 本构模型, Biderman 本构模型增加了应变不变量 I_2 项,参数也增加了 C_{01} 项,因此不仅可以对小应变更好地进行描述,对中等应变以及大应变的契合程度也更高。

表3 Biderman 模型拟合参数

Table 3 Biderman model fitting parameters

应变率/s ⁻¹	C ₁₀	C ₀₁	C ₂₀	C ₃₀	卡方值
0.010 0	0.018 11	-0.048 26	0.021 06	-0.001 31	0.019 30
0.001 0	0.017 71	-0.041 02	0.017 52	-0.001 06	0.020 52
0.000 3	0.016 62	-0.035 43	0.014 91	-0.000 88	0.005 06

3.4 Ogden 本构模型

Ogden 本构模型的拟合结果如图 4(d) 所示, 拟合参数如表 4 所示。由拟合效果可知, Ogden 本构模型

表4 Ogden 模型拟合参数

Table 4 Ogden model fitting parameters

应变率/s ⁻¹	μ_1	α_1	μ_2	α_2	μ_3	α_3	卡方值
0.010 0	19.895 15	-41.359 25	18.830 86	2.293 45	2.212 23	2.293 44	0.033 08
0.001 0	23.572 89	-48.907 87	23.070 34	2.345 19	2.289 14	2.345 19	0.032 40
0.000 3	17.309 35	-36.568 06	17.470 56	2.406 21	2.347 00	2.406 21	0.036 00

卡方值表示试验数据与拟合曲线的相关程度, 如果卡方值小于 0.05, 则说明双方是显著相关的, 也就是说拟合结果是符合的。卡方值大于 0, 数值越小表明相关性越显著, 拟合效果越好。表 5 所示为 4 种模型拟合参数的卡方值对比, 可以很明显地看出这 4 种模型在 3 种应变率下的拟合效果, Mooney-Rivlin 和 Yeoh 2 种模型卡方值均大于 0.05, 不符合要求。Biderman 模型与 Ogden 模型 3 种应变率下的卡方值均小于 0.05, 试验数据与拟合曲线显著相关, 这 2 种模型卡方值对比可以看出相同应变率下 Biderman 模型卡方值更小, 相关性更显著, 拟合程度也就更好。

表5 4 种模型拟合参数卡方值

Table 5 Chi-square values of four-model fitting parameters

应变率/s ⁻¹	卡方值			
	Mooney-Rivlin 本构模型	Yeoh 本构模型	Biderman 本构模型	Ogden 本构模型
0.010 0	4.744 07	0.314 36	0.019 30	0.033 08
0.001 0	3.514 07	0.254 41	0.020 52	0.032 40
0.000 3	2.710 50	0.220 55	0.005 06	0.036 00

4 结论

课题组使用电子万能试验机对聚氨酯弹性体进行准静态下压缩试验。对预处理试样进行不同应变率的压缩加载试验, 将得到的数据处理之后导入专业绘图工具, 最后利用 4 种本构模型对试验数据进行拟合。

对试验数据的拟合效果相对于 Mooney-Rivlin、Yeoh 这 2 种本构模型为佳, 仅次于 Biderman 模型。在应变为 0% ~ 1% 时, 模型的应力为负值, 这点与试验不符。Ogden 本构模型对于试验试样大于 2% 的应变拟合效果较好。相对于前 2 种模型, Ogden 本构模型具有更好的拟合效果, 这与 Ogden 本构模型包含更多的参数有关, 但因为 Ogden 本构模型参数较多, 所以其拟合所需要的收敛时间更长, 拟合参数的初始设定也更加繁琐。

通过对实验数据拟合对比分析, 可以得到如下结论:

1) 聚氨酯类弹性体具有应力软化效应, 若要得到准确的实验数据, 需要多次循环加载以消除 Mullins 效应。

2) Mooney-Rivlin 本构模型对试验数据的拟合效果很差; Yeoh 本构模型在小形变偏离较大而中等形变状态下拟合稍有偏离; 拥有 6 个参数的 Ogden 本构模型对试验数据的拟合效果较好, 但由于参数较多, 收敛时间增大且初始值设定较为麻烦; 对该试样拟合效果最好的是 Biderman 本构模型, 不仅拟合程度最佳, 并且参数数量适中, 该模型能够很好地描述聚氨酯单轴压缩加载状态下的力学行为。

3) 本研究应力-应变曲线的拟合为后续材料的仿真建模提供了可靠的前提条件以及对进一步研究聚氨酯材料的热力学行为和黏弹性行为提供了一定的参照。

参考文献:

- [1] 赵川, 夏合勇, 吕海立, 等. 机器人的运动轨迹研究与仿真[J]. 机械研究与应用, 2016, 29(2): 27-30.
- [2] 李小唐. 六自由度串联机械手位置逆解若干问题的研究[D]. 北京: 北京邮电大学, 2006: 2-4.
- [3] 江晓军, 瞿丹晨, 徐洁, 等. 一种角位移测量仪的研制[J]. 电子测量技术, 2010, 33(2): 38-40.
- [4] 魏志刚, 陈海波. 一种新的橡胶材料弹性本构模型[J]. 力学学报, 2019, 51(2): 473-483.

(下转第 18 页)